ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ НА ВАРИАЦИОННИЯ АНАЛИЗ ПРИ ИЗСЛЕДВАНЕ НА КЛАС ПОСТОЯННОТОКОВИ ВЕРИГИ

Гл. ас. д-р инж. Мирослава Гришева Донева
Технически университет – Варна

Резюме: *Представена е параметризация на вариационния анализ с предавателни коефициенти за клас линейни постояннотокови вериги с неизменна топология. При всяко отделно изследване се изменя едно съпротивление, а останалите параметри се запазват постоянни. Напреженията се изразяват чрез един независим предавателен коефициент, като връзките между коефициентите се получават от подбрани независими уравнения по законите на Кирхоф. Вариационният функционал е представен като квадратична функция на независимия коефициент с параметрично зависещи коефициенти. Установени са условията за единствен минимум и съответствието на стационарното решение с действителния режим. Постановката е приложена към верига с един източник на напрежение и пет резистора. Изведени са аналитични зависимости на напреженията, токовете и мощностите при изменение на R_2 и при изменение на R_5. Решенията са представени като линии на минимумите върху повърхнините на функционала. При първото изследване е установена смяна на посоката на тока през R_5, а при второто — максимум на мощността на този резистор. Разграничени са варирането по независимия коефициент и изменението на физически параметър на веригата.*

Ключови думи: *вариационен анализ, предавателни коефициенти, параметризация, постояннотокови вериги, вариационен функционал, стационарност.*

PARAMETERIZATION OF VARIATIONAL ANALYSIS FOR A CLASS OF DC CIRCUITS

Assist. Prof. Dr. Eng. Miroslava Grisheva Doneva
Technical University of Varna

Abstract: *A parameterization of variational analysis with transfer coefficients is presented for a class of linear DC circuits with fixed topology. In each study, one resistance is varied while all other circuit parameters remain constant. The voltages are expressed in terms of one independent transfer coefficient using selected independent Kirchhoff equations. The variational functional is a quadratic function of this coefficient, with coefficients that depend on the circuit parameter. Conditions for a unique minimum are established, and the stationary solution is shown to correspond to the physical operating state. The formulation is applied to a circuit with one voltage source and five resistors. Analytical expressions for voltages, currents, and powers are derived for variation of R_2 and for variation of R_5. The*

DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

solutions are represented as curves of minima on the functional surfaces. The first study identifies a reversal of the current through R_5, whereas the second identifies a maximum of its individual power. Variation with respect to the independent transfer coefficient is distinguished from changes in a physical circuit parameter.

Keywords: *variational analysis, transfer coefficients, parameterization, DC circuits, variational functional, stationarity.*

1. Увод

Вариационният подход за анализ на електрически вериги е представен в [2, 3], а развитието му с предавателни коефициенти е разгледано в [1, 4, 7]. При този подход неизвестните реакции се изразяват чрез независим предавателен коефициент, чиято стойност се определя от стационарността на вариационния функционал. В настоящата работа се въвежда изменяем параметър на веригата и се извежда решение за семейство вериги с еднаква топология.

Целта е да се изведат аналитични зависимости на стационарния предавателен коефициент, напреженията, токовете и мощностите от едно изменяно съпротивление. Постановката се прилага към постояннотокова верига с един източник на напрежение и пет резистора. Разглеждат се две семейства: при изменение на R_2 и при изменение на R_5, като във всяко изследване останалите параметри се запазват постоянни.

Разграничават се две различни изменения: вариране на независимия предавателен коефициент при зададена верига и изменение на физически параметър между отделните режими. Първото определя действителния режим, а второто описва зависимостта на този режим от параметъра. Тази разлика е съществена при построяването на функционала и при тълкуването на неговите графични представяния.

2. Параметрична постановка на вариационния анализ

2.1. Представяне на реакциите и функционала

Нека λ принадлежи на интервал Λ от допустими стойности на избрания параметър. За фиксирано λ напреженията върху резисторите се представят чрез един независим предавателен коефициент k във вида:

$$u_q(k;\lambda) = E\left[a_q(\lambda)k + b_q(\lambda)\right],\ \ q = 1, \ldots, m. \tag{1}$$

Коефициентите a_q и b_q се получават от използваните независими уравнения по законите на Кирхоф. Те могат да зависят от λ, но са постоянни при диференциране по k. В разглежданата напреженова постановка функционалът се записва като сума от мощностите на резисторите:

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

$$P_к(k;\lambda) = E^2 \sum_{q=1}^{m} \frac{\left[a_q(\lambda)k + b_q(\lambda)\right]^2}{R_q(\lambda)}. \quad (2)$$

При линейното представяне (1) функционалът (2) е квадратична функция на независимия предавателен коефициент:

$$P_к(k;\lambda) = A(\lambda)k^2 + B(\lambda)k + C(\lambda), \quad (3)$$

$$A(\lambda) = E^2 \sum_{q=1}^{m} \frac{a_q{}^2(\lambda)}{R_q(\lambda)}, \quad (4)$$

$$B(\lambda) = 2E^2 \sum_{q=1}^{m} \frac{a_q(\lambda)b_q(\lambda)}{R_q(\lambda)}, \quad (5)$$

$$C(\lambda) = E^2 \sum_{q=1}^{m} \frac{b_q{}^2(\lambda)}{R_q(\lambda)}. \quad (6)$$

При положителни съпротивления и поне един ненулев коефициент $a_q(\lambda)$ е изпълнено $A(\lambda) > 0$. Следователно за всяка фиксирана стойност на параметъра λ функционалът е квадратична функция на независимия предавателен коефициент с единствен минимум. Това позволява стационарното решение да се проследи в целия разглеждан параметричен интервал.

2.2. Стационарно решение на параметричното семейство

При изследването на стационарността се използват първата и втората производна на функционала. Разграничаването на необходимото условие за стационарност и достатъчните условия за минимум е основно положение на вариационното смятане [6]. За разглежданата квадратична форма тези условия се установяват непосредствено.

Ако $E \neq 0$, всички $R_q(\lambda)$ са положителни и поне един коефициент $a_q(\lambda)$ е ненулев, то $A(\lambda) > 0$. При тези условия функционалът има единствен минимум за всяка фиксирана допустима стойност на λ. От необходимото условие за стационарност се получава:

$$\frac{\partial P_к}{\partial k} = 2A(\lambda)k + B(\lambda) = 0, \quad (7)$$

$$k^*(\lambda) = -\frac{B(\lambda)}{2A(\lambda)}. \quad (8)$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

Втората производна е положителна:

$$\frac{\partial^2 P_к}{\partial k^2} = 2A(\lambda) > 0. \tag{9}$$

Следователно стационарната стойност е единствената точка на минимум по k. За да представлява тя действителното решение на веригата, се проверява и връзката между стационарното условие и независимото уравнение, което не е използвано при параметризацията. За изследваната схема тази връзка е установена в раздел 4.

Минималната стойност и отклонението от нея се представят във вида:

$$P_{к,min}(\lambda) = C(\lambda) - \frac{B^2(\lambda)}{4A(\lambda)}, \tag{10}$$

$$P_к(k;\lambda) - P_{к,min}(\lambda) = A(\lambda)[k - k^*(\lambda)]^2. \tag{11}$$

Равенство (11) определя нарастването на функционала при отклонение на независимия предавателен коефициент от стационарната му стойност. Коефициентът A определя кривината на параболата при избраната параметризация, а втората производна е 2A. Числената стойност на A зависи от мащаба на независимия коефициент.

2.3. Геометрично представяне и параметрична чувствителност

За всяка фиксирана стойност на λ графиката на функционала спрямо k е парабола. Съвкупността от тези параболи образува повърхнина, върху която стационарните решения определят параметрична линия:

$$\Gamma(\lambda) = [\lambda, k^*(\lambda), P_{к,min}(\lambda)], \quad \lambda \in \Lambda. \tag{12}$$

Линията (12) обединява стационарните решения на семейството. Параметърът λ задава конкретната верига, а варирането по k при фиксирано λ определя нейния режим.

При диференцируеми зависимости $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ чувствителността на стационарния предавателен коефициент се определя чрез диференциране на условието за стационарност:

$$\frac{dk^*}{d\lambda} = -\frac{2A'(\lambda)k^*(\lambda) + B'(\lambda)}{2A(\lambda)}. \tag{13}$$

След определяне на $k^*(\lambda)$ реакциите се получават чрез заместване в параметричните им изрази. Така аналитичното решение обхваща допустимия интервал Λ, докато численото графично представяне обикновено се ограничава до избран краен диапазон.

3. Изследвана постояннотокова верига

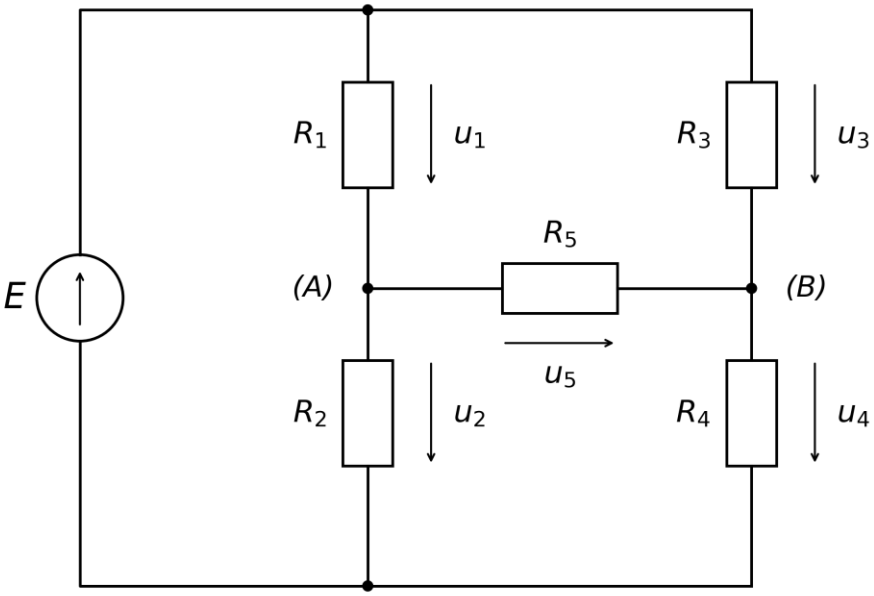
Схемата съдържа пет линейни резистора и идеален източник на ЕДН E, насочена от долния към горния възел. Положителните посоки на напреженията u_1 и u_3 са от горния възел към (A) и (B), а на u_2 и u_4 — от (A) и (B) към долния възел. Напрежението

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

u_5 е насочено от (A) към (B). Положителната посока на тока i_E през източника съвпада с посоката на ЕДН.

3.1. Параметри на веригата

$$E = 20\,V; \quad R_1 = 10\,\Omega; \quad R_3 = 20\,\Omega; \quad R_4 = 10\,\Omega. \tag{14}$$



Фиг. 1. Изследвана постояннотокова верига

За двете изследвания се приемат еднакви стойности на E, R_1, R_3 и R_4. В първото се изменя $R_2 > 0$ при $R_5 = 15\ \Omega$ и постоянни останали параметри. Във второто се изменя $R_5 > 0$ при $R_2 = 10\ \Omega$ и постоянни останали параметри. Топологията на веригата се запазва.

4. Параметризация чрез предавателни коефициенти

Напреженията върху резисторите се нормализират спрямо зададеното напрежение E и се представят чрез безразмерни предавателни коефициенти:

$$u_1 = k_1 E; \quad u_2 = k_2 E; \quad u_3 = k_3 E; \quad u_4 = k_4 E; \quad u_5 = k_5 E. \tag{15}$$

Използват се три независими контурни уравнения по втория закон на Кирхоф [5]:

$$u_1 + u_2 = E; \quad u_3 + u_4 = E; \quad u_2 - u_4 - u_5 = 0. \tag{16}$$

След заместване на напреженията и съкращаване на $E \neq 0$ се получава връзката между предавателните коефициенти:

$$k_1 = 1 - k_2; \quad k_3 = 1 - k_4; \quad k_5 = k_2 - k_4. \tag{17}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

Към трите контурни уравнения се добавя едно независимо уравнение по първия закон на Кирхоф за възел (A). След изразяване на токовете чрез напреженията се получава:

$$\frac{u_1}{R_1} = \frac{u_2}{R_2} + \frac{u_5}{R_5}, \tag{18}$$

$$\frac{1-k_2}{R_1} = \frac{k_2}{R_2} + \frac{k_5}{R_5}. \tag{19}$$

При параметризация с независим предавателен коефициент k_2 зависимите коефициенти се изразяват във вида:

$$k_5 = \frac{R_5}{R_1} - R_5\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)k_2; \quad k_4 = k_2 - k_5. \tag{20}$$

За съкратен запис се въвеждат безразмерните величини:

$$\alpha = \frac{R_5}{R_1}; \quad \beta = R_5\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \tag{21}$$

$$k_1 = 1 - k_2; \quad k_3 = 1 + \alpha - (1+\beta)k_2; \tag{22}$$

$$k_4 = (1+\beta)k_2 - \alpha; \quad k_5 = \alpha - \beta k_2. \tag{23}$$

Използваните четири независими уравнения определят еднопараметрично множество от съчетания на петте предавателни коефициенти. Действителната стойност на k_2 се определя от условието за стационарност на функционала. Независимото възлово уравнение за (B) не участва при изразяването на зависимите предавателни коефициенти.

4.1. Връзка с неизползваното възлово уравнение

За възел (B) се дефинира остатъкът от неизползваното независимо уравнение:

$$F_B = \frac{u_3}{R_3} + \frac{u_5}{R_5} - \frac{u_4}{R_4}. \tag{24}$$

При $k = k_2$, $k_4 = (1 + \beta)k_2 - \alpha$ и $k_5 = \alpha - \beta k_2$ производната на функционала се записва като:

$$\frac{dP_к}{dk_2} = 2E^2\left[\frac{k_2 - 1}{R_1} + \frac{k_2}{R_2} + (1+\beta)\left(\frac{k_4 - 1}{R_3} + \frac{k_4}{R_4}\right) - \beta\frac{k_5}{R_5}\right]. \tag{25}$$

От използваното уравнение за възел (A) следва $(k_2 - 1)/R_1 + k_2/R_2 = -k_5/R_5$. След заместване се получава структурната връзка:

$$\frac{dP_к}{dk_2} = -2E(1+\beta)F_B. \tag{26}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

За положителни съпротивления $\beta > 0$ и множителят е ненулев. Следователно стационарността е еквивалентна на $F_B = 0$ и възстановява неизползваното независимо уравнение. Тъй като коефициентът пред k_2 в u_2/E е единица, $A \geq E^2/R_2 > 0$. Така за всяка положителна двойка R_2, R_5 се установяват еднозначността на минимума и съответствието му с действителния режим.

5. Баланс на мощностите и вариационен функционал

При избраните положителни посоки генерираната мощност на източника е $E \cdot i_E$, а консумираната мощност е сумата от мощностите на резисторите. В действителния режим балансът на мощностите се записва като:

$$P_г = P_к; \quad E\, i_E = \frac{u_1^{\,2}}{R_1} + \frac{u_2^{\,2}}{R_2} + \frac{u_3^{\,2}}{R_3} + \frac{u_4^{\,2}}{R_4} + \frac{u_5^{\,2}}{R_5}. \tag{27}$$

Токът през източника се изразява чрез първия закон на Кирхоф за горния възел:

$$i_E = \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_3}{R_3} = E\left(\frac{1-k_2}{R_1} + \frac{1+\alpha-(1+\beta)k_2}{R_3}\right). \tag{28}$$

Зависимост (28) определя тока през източника като функция на k_2. След заместването ѝ в (27) и деление на E^2 се получава:

$$\begin{aligned} \frac{i_E}{E} &= \frac{1-k_2}{R_1} + \frac{1+\alpha-(1+\beta)k_2}{R_3} = \\ &= \frac{(1-k_2)^2}{R_1} + \frac{k_2^{\,2}}{R_2} + \frac{[1+\alpha-(1+\beta)k_2]^2}{R_3} \\ &\quad + \frac{[(1+\beta)k_2-\alpha]^2}{R_4} + \frac{(\alpha-\beta k_2)^2}{R_5}. \end{aligned} \tag{29}$$

Вариационният функционал се построява от израза за консумираната мощност. Мощността на базисния източник не се включва във функционала:

$$\begin{aligned} &P_к(k_2; R_2, R_5) = \\ &= E^2\left[\begin{array}{c} \dfrac{(1-k_2)^2}{R_1} + \dfrac{k_2^{\,2}}{R_2} + \\ + \dfrac{[1+\alpha-(1+\beta)k_2]^2}{R_3} + \dfrac{[(1+\beta)k_2-\alpha]^2}{R_4} + \dfrac{(\alpha-\beta k_2)^2}{R_5} \end{array}\right]. \end{aligned} \tag{30}$$

Балансът на мощностите се изпълнява в действителния режим и не представлява тъждество за произволна стойност на k_2. Вариационният функционал е определен върху еднопараметричното множество, зададено от използваните уравнения, а условието за стационарност определя действителната стойност на независимия предавателен коефициент.

При параметричното изследване се изменя само избраното съпротивление. При диференцирането по k_2 параметрите E, R_1–R_5, както и зависещите от тях величини α и β, се разглеждат като постоянни.

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

6. Изменение на съпротивлението R_2

За първото изследване се приема $R_5 = 15\ \Omega$ при зададените стойности на останалите параметри. Означава се $R_2 = r\ \Omega$, $r > 0$, като в следващите числени изрази r е стойността на съпротивлението в омове.

$$\alpha = 1{,}5; \quad \beta = 1{,}5 + \frac{15}{r}. \tag{31}$$

$$k_5 = 1{,}5 - \left(1{,}5 + \frac{15}{r}\right) k_2; \tag{32}$$

$$k_4 = \left(2{,}5 + \frac{15}{r}\right) k_2 - 1{,}5; \quad k_3 = 2{,}5 - \left(2{,}5 + \frac{15}{r}\right) k_2. \tag{33}$$

След заместване на параметрите и привеждане на подобните членове вариационният функционал приема вида:

$$P_{\text{к}}(k_2, r) = \left(475 + \frac{6100}{r} + \frac{19500}{r^2}\right) {k_2}^2 - \\ - \left(750 + \frac{4500}{r}\right) k_2 + 315 \quad [W]. \tag{34}$$

Генерираната мощност, изразена чрез същия коефициент, е:

$$P_{\text{г}}(k_2, r) = 90 - \left(90 + \frac{300}{r}\right) k_2 \quad [W]. \tag{35}$$

Следователно уравнението за баланса на мощностите е:

$$90 - \left(90 + \frac{300}{r}\right) k_2 = \left(475 + \frac{6100}{r} + \frac{19500}{r^2}\right) {k_2}^2 - \\ - \left(750 + \frac{4500}{r}\right) k_2 + 315. \tag{36}$$

6.1. Стационарно решение за семейството вериги

За всяка фиксирана положителна стойност на r независимият предавателен коефициент се определя от условието за стационарност на функционала (34). Диференцирането се извършва по k_2, като r се разглежда като параметър:

$$\frac{\partial P_{\text{к}}}{\partial k_2} = 2\left(475 + \frac{6100}{r} + \frac{19500}{r^2}\right) k_2 - \left(750 + \frac{4500}{r}\right) = 0. \tag{37}$$

След решаване спрямо независимия предавателен коефициент и съкращаване на общите множители се получава:

$${k_2}^*(r) = \frac{750r^2 + 4500r}{950r^2 + 12200r + 39000} = \frac{15r}{19r + 130}, \quad r > 0. \tag{38}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

Втората частна производна на функционала е положителна в целия разглеждан интервал:

$$\frac{\partial^2 P_к}{\partial {k_2}^2} = 950 + \frac{12200}{r} + \frac{39000}{r^2} > 0. \tag{39}$$

За всяко $r > 0$ функционалът има единствен минимум по k_2. Зависимост (38) определя стационарния коефициент за цялото семейство. Съответствието с действителния режим следва от (26), тъй като при стационарния коефициент се изпълнява и неизползваното възлово уравнение.

6.2. Напрежения и мощност в действителния режим

Чрез заместване на (38) във връзките между предавателните коефициенти се определят останалите стационарни коефициенти:

$$\begin{aligned} {k_1}^*(r) &= \frac{4r + 130}{19r + 130}; \quad {k_3}^*(r) = \frac{10r + 100}{19r + 130}; \\ {k_4}^*(r) &= \frac{9r + 30}{19r + 130}; \quad {k_5}^*(r) = \frac{6(r - 5)}{19r + 130}. \end{aligned} \tag{40}$$

Напреженията върху резисторите се получават като произведения на съответните коефициенти и зададеното напрежение $E = 20$ V. По-специално за изменяния резистор и за резистора между междинните възли се получава:

$${u_2}^*(r) = \frac{300r}{19r + 130} \ [V]; \quad {u_5}^*(r) = \frac{120(r - 5)}{19r + 130} \ [V]. \tag{41}$$

При заместване на стационарния коефициент във функционала (34) се получава общата консумирана мощност в действителния режим. Същият израз се получава и от генерираната мощност (35), което потвърждава изпълнението на баланса:

$$P_{к,min}(r) = P_г({k_2}^*(r), r) = \frac{360(r + 20)}{19r + 130} \ [W]. \tag{42}$$

Зависимостта на функционала от отклонението на независимия коефициент спрямо стационарната му стойност може да се представи точно във вида:

$$\begin{aligned} &P_к(k_2, r) - P_{к,min}(r) = \\ &= \left(475 + \frac{6100}{r} + \frac{19500}{r^2}\right)\left[k_2 - \frac{15r}{19r + 130}\right]^2. \end{aligned} \tag{43}$$

Равенство (43) показва, че при фиксирано r всяко ненулево отклонение от стационарния коефициент увеличава функционала с положителна квадратична величина.

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

6.3. Параметрична чувствителност и изменение на режима

Чувствителността на стационарния коефициент и на общата консумирана мощност спрямо изменяното съпротивление се определя чрез обикновено диференциране на получените параметрични зависимости:

$$\frac{dk_2^*}{dr} = \frac{1950}{(19r+130)^2} > 0; \quad \frac{dP_{к,min}}{dr} = -\frac{90000}{(19r+130)^2} < 0. \tag{44}$$

От (44) следва, че с увеличаване на R_2 стационарният коефициент k_2^* и напрежението u_2 нарастват, а общата консумирана мощност намалява. Тези зависимости описват изменението на действителния режим между веригите от семейството.

Токът през R_5 се определя от напрежението u_5 и постоянното съпротивление R_5 = 15 Ω:

$$i_5^*(r) = \frac{u_5^*(r)}{15} = \frac{8(r-5)}{19r+130} \quad [A]. \tag{45}$$

Знаменателят е положителен за всички $r > 0$. Поради това при $0 < r < 5$ напрежението u_5 и токът i_5 са отрицателни спрямо зададените положителни посоки; при $r = 5$ те са нулеви, а при $r > 5$ са положителни. При $R_2 = 5$ Ω потенциалите на възлите (A) и (B) се изравняват. Преминаването през тази стойност води до смяна на посоката на тока през R_5, без прекъсване на параметричното решение.

Граничните стойности на стационарния коефициент и мощността са:

$$\begin{aligned} r \to 0^+: &\quad k_2^* \to 0, \quad P_{к,min} \to \frac{720}{13} \quad W; \\ r \to \infty: &\quad k_2^* \to \frac{15}{19}, \quad P_{к,min} \to \frac{360}{19} \quad W. \end{aligned} \tag{46}$$

Границата $r \to 0^+$ съответства на стремеж към късо съединение на клона с R_2, а $r \to \infty$ — към прекъсването му. Режимите на двете гранични вериги се получават като граници на изведените зависимости.

За графичното изследване стационарните решения се представят като параметрична линия върху повърхнината на функционала:

$$\Gamma_2(r) = \left[r, \frac{15r}{19r+130}, \frac{360(r+20)}{19r+130}\right], \quad r > 0. \tag{47}$$

Всяка точка от (47) е минимум на съответното сечение при фиксирано r. Линията проследява едновременно изменението на стационарния коефициент и на общата мощност. Графиките на u_2 и u_5 допълват това представяне с изменението на напреженията и смяната на посоката през R_5.

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

7. Изменение на съпротивлението R_5

Във второто параметрично изследване се изменя само $R_5 = s\ \Omega$, $s > 0$, а $R_2 = 10\ \Omega$ и останалите параметри се запазват постоянни. Както при първото изследване, s означава числената стойност на съпротивлението в омове. Независимият предавателен коефициент остава k_2. От (21) следва:

$$\alpha = \frac{s}{10}; \quad \beta = \frac{s}{5}. \tag{48}$$

След заместване в (30) и привеждане на подобните членове функционалът се представя като квадратична функция на k_2:

$$\begin{aligned} P_{\text{к}}(k_2, s) = \left(\frac{12}{5}s^2 + 40s + 140\right){k_2}^2 - \\ -\left(\frac{12}{5}s^2 + 36s + 120\right)k_2 + \frac{3}{5}s^2 + 8s + 60 \quad [W]. \end{aligned} \tag{49}$$

Условието за стационарност спрямо независимия предавателен коефициент дава:

$$\frac{\partial P_{\text{к}}}{\partial k_2} = 2\left(\frac{12}{5}s^2 + 40s + 140\right)k_2 - \left(\frac{12}{5}s^2 + 36s + 120\right) = 0. \tag{50}$$

След разлагане на множители и съкращаване се получава аналитичната зависимост:

$${k_2}^*(s) = \frac{3(s+10)}{2(3s+35)}, \quad s > 0. \tag{51}$$

Втората частна производна е положителна за всички допустими стойности на параметъра:

$$\frac{\partial^2 P_{\text{к}}}{\partial {k_2}^2} = \frac{24}{5}s^2 + 80s + 280 > 0. \tag{52}$$

Така и при изменение на R_5 се установява единствен минимум по k_2 във всяка верига от семейството. Заместването на стационарния коефициент във връзките между коефициентите определя:

$$\begin{aligned} {k_1}^*(s) = \frac{3s+40}{2(3s+35)}; \quad {k_3}^*(s) = \frac{2(s+10)}{3s+35}; \\ {k_4}^*(s) = \frac{s+15}{3s+35}; \quad {k_5}^*(s) = \frac{s}{2(3s+35)}. \end{aligned} \tag{53}$$

За напрежението и тока през изменяния резистор и за общата консумирана мощност се получава:

$${u_5}^*(s) = \frac{10s}{3s+35} \quad [V]; \quad {i_5}^*(s) = \frac{10}{3s+35} \quad [A]. \tag{54}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

$$P_{к,min}(s) = P_г(k_2^*(s), s) = \frac{100(s+12)}{3s+35} \quad [W]. \tag{55}$$

За разлика от първото изследване, при всяко $s > 0$ напрежението u_5 и токът i_5 са положителни спрямо зададените посоки. При увеличаване на R_5 напрежението върху него нараства, а токът намалява. Общата консумирана мощност също намалява, което се установява от:

$$\begin{aligned} \frac{dk_2^*}{ds} &= \frac{15}{2(3s+35)^2} > 0; \quad \frac{dP_{к,min}}{ds} = -\frac{100}{(3s+35)^2} < 0; \\ \frac{du_5^*}{ds} &= \frac{350}{(3s+35)^2} > 0; \quad \frac{di_5^*}{ds} = -\frac{30}{(3s+35)^2} < 0. \end{aligned} \tag{56}$$

Мощността само на резистора R_5 има различно поведение от общата мощност на веригата:

$$P_5^*(s) = \frac{100s}{(3s+35)^2} \quad [W]; \quad \frac{dP_5^*}{ds} = \frac{100(35-3s)}{(3s+35)^3}. \tag{57}$$

Тя нараства до $s = 35/3$ и след това намалява. Максималната мощност върху R_5 е:

$$R_5 = \frac{35}{3} \quad \Omega: \quad P_{5,max} = \frac{5}{21} \quad W. \tag{58}$$

Максимумът (58) се отнася до мощността на отделния резистор при изменение на s. Той трябва да се разграничава от минимума на общия функционал по k_2 при фиксирано s. Получената стойност на R_5 съвпада с еквивалентното съпротивление на останалата част от веригата, наблюдавано от неговите изводи при заместване на идеалния източник на напрежение с късо съединение:

$$R_{екв} = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2} + \frac{R_3R_4}{R_3+R_4} = 5 + \frac{20}{3} = \frac{35}{3} \quad \Omega. \tag{59}$$

Съвпадението с (59) е съгласувано с условието за максимална мощност в резистивен товар [5]. При това общата мощност на веригата остава строго намаляваща функция на s.

Граничните стойности на напрежението, тока и общата мощност са:

$$\begin{aligned} s \to 0^+: &\quad u_5^* \to 0, \quad i_5^* \to \frac{2}{7} \quad A, \quad P_{к,min} \to \frac{240}{7} \quad W; \\ s \to \infty: &\quad u_5^* \to \frac{10}{3} \quad V, \quad i_5^* \to 0, \quad P_{к,min} \to \frac{100}{3} \quad W. \end{aligned} \tag{60}$$

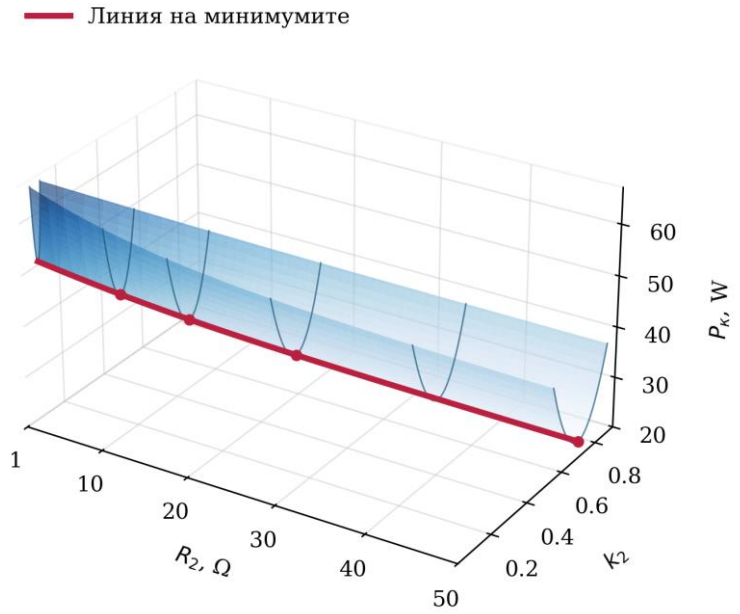
Геометрично стационарните решения от второто изследване определят линията:

$$\Gamma_5(s) = \left[s, \frac{3(s+10)}{2(3s+35)}, \frac{100(s+12)}{3s+35}\right], \quad s > 0. \tag{61}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

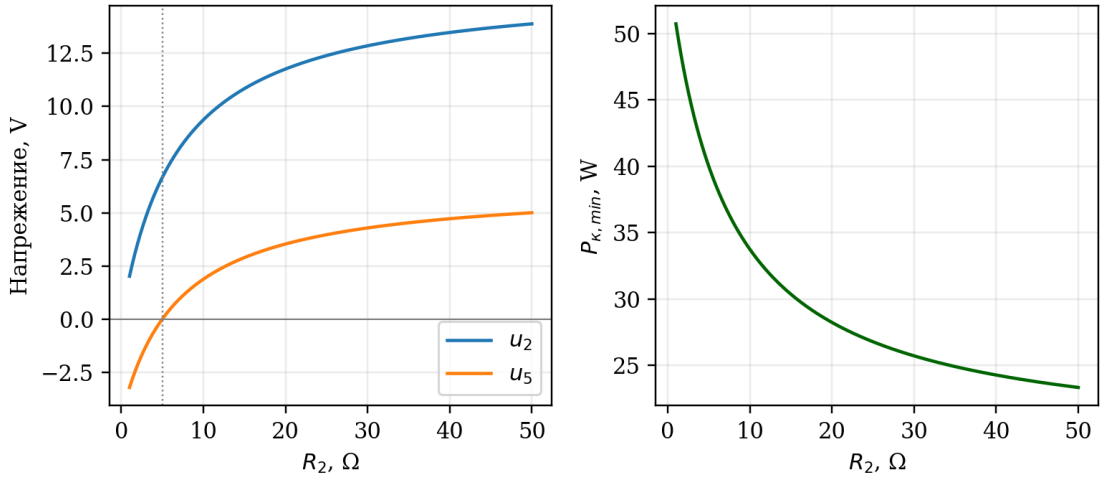
8. Графично представяне и съпоставка на резултатите

Графиките са построени по изведените аналитични зависимости. Избрани са интервалите $1 \le r \le 50$ и $1 \le s \le 50$, които включват смяната на посоката при $r = 5$ и максимума на мощността на R_5 при $s = 35/3$. Ограничението на графичния диапазон не променя валидността на решенията за всички крайни положителни стойности на съответното съпротивление.



Фиг. 2. Повърхнина на функционала и линия на минимумите при изменение на R_2

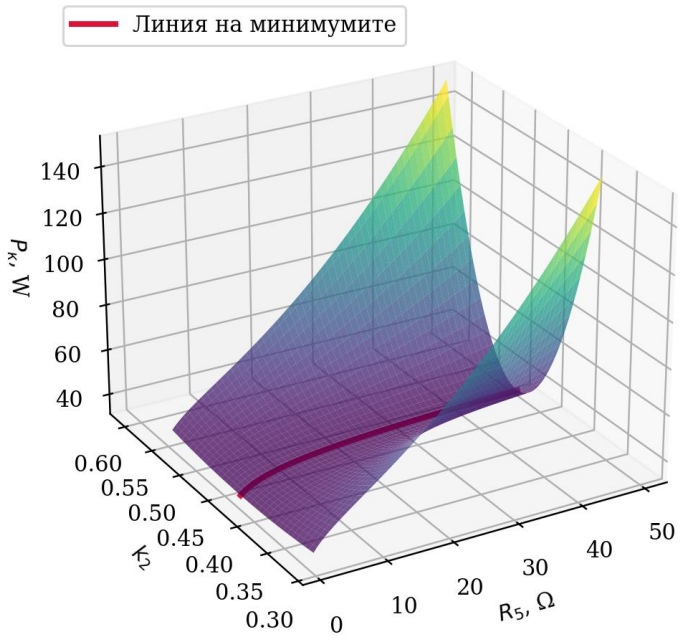
На фиг. 2 е показана околност на линията на минимумите при $1 \le r \le 50$, в която мощността превишава минималната стойност за съответното r с не повече от 15 W. Широчината на показаната област по k_2 зависи от r. Подчертани са параболичните сечения при R_2 = 1; 5; 10; 20; 35 и 50 Ω, а червената линия обединява техните минимуми. Нарастването на k_2^* е съпроводено с намаляване на минималната мощност.



Фиг. 3. Напрежения и обща консумирана мощност при изменение на R_2

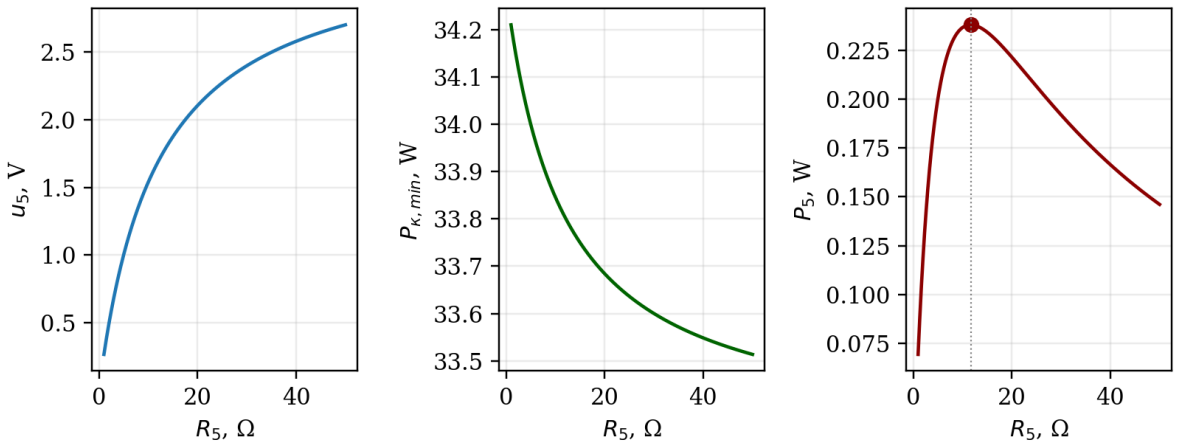
ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

На фиг. 3 се вижда преминаването на u_5 през нулата при $R_2 = 5\ \Omega$. Напрежението u_2 нараства монотонно, докато общата мощност намалява. Така смяната на посоката в клона с R_5 се проследява чрез една непрекъсната аналитична зависимост.



Фиг. 4. Повърхнина на функционала и линия на минимумите при изменение на R_5

На фиг. 4 е показана околността $|k_2 - k_2^*| \leq 0{,}12$. При увеличаване на R_5 коефициентът пред квадратичния член нараства, поради което сеченията стават по-стръмни. Това е свойство на функционала при избраната параметризация. Общата мощност по линията на минимумите се изменя в значително по-тесен диапазон спрямо първото изследване.



Фиг. 5. Напрежение, обща мощност и мощност на R_5 при изменение на R_5

DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

Фиг. 5 показва едновременно нарастване на u_5, намаляване на общата мощност и наличие на максимум на мощността на отделния резистор R_5. За разлика от изменението на R_2, тук токът през R_5 запазва посоката си за целия положителен параметричен интервал.

9. Заключение

Представена е параметризация на вариационния анализ с предавателни коефициенти за семейство линейни постояннотокови вериги с един източник на напрежение и неизменна топология. При всяко отделно изследване се изменя едно съпротивление, а останалите параметри се запазват постоянни. Връзките между коефициентите задават допустимото еднопараметрично множество, а независимият предавателен коефициент се определя от стационарността на функционала.

За двете изследвани семейства са изведени аналитични зависимости на стационарния коефициент, напреженията и мощностите от изменяното съпротивление. Установен е единствен минимум по независимия коефициент при всяка положителна стойност на параметъра. Стационарните решения са представени като линии на минимумите върху съответните повърхнини на функционала.

При изменение на R_2 напрежението и токът през R_5 сменят посоката си при R_2 = 5 Ω. При изменение на R_5 посоката се запазва, но мощността на този резистор достига максимум при R_5 = 35/3 Ω. И в двете семейства общата консумирана мощност намалява при увеличаване на изменяното съпротивление. Получените резултати разграничават минимума на функционала по независимия предавателен коефициент от екстремумите на отделни физически величини при изменение на параметър на веригата.

Използвана литература

1. Донева, М. Вариационен анализ на електрически вериги. Дисертация за придобиване на образователна и научна степен „Доктор“, професионално направление 5.2 „Електротехника, електроника и автоматика“. Технически университет – Варна, 2018.
2. Панов, Е. Вариационен метод за анализ на електрически вериги. Известия на Съюза на учените – Варна, серия „Технически науки“, № 2/1995, № 1/1996, с. 56–59.
3. Панов, Е. Изследване на възможностите на вариационния метод за анализ на електрически вериги. Известия на Съюза на учените – Варна, серия „Технически науки“, № 2/1995, № 1/1996, с. 60–62.
4. Панов, Е., & Донева, М. Изследване на възможностите на метода с предавателните коефициенти в комбинация с вариационния подход за анализ на електрически вериги. Годишник на Технически университет – Варна, 2014, том I, с. 79–84. ISSN 1311-896X.

DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.87

5. Alexander, C. K., & Sadiku, M. N. O. Fundamentals of Electric Circuits. 7th ed. McGraw-Hill Education, 2021.
6. Gelfand, I. M., & Fomin, S. V. Calculus of Variations. Dover Publications, New York, 2000.
7. Panov, E. I., & Doneva, M. Gr. An Overview of the Possibilities of the Variational Analysis for Exploration of Electric Circuits. Journal of Communication and Computer, 2017, Vol. 14, No. 3, pp. 142–147. DOI: 10.17265/1548-7709/2017.03.006.