ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

ВАРИАЦИОНЕН ПОДХОД ЗА АНАЛИЗ НА ПРЕХОДНИ ПРОЦЕСИ В ЛИНЕЙНИ ЕЛЕКТРИЧЕСКИ ВЕРИГИ ОТ ПЪРВИ РЕД

Гл. ас. д-р инж. Мирослава Гришева Донева
Технически университет – Варна

Резюме: *В настоящата публикация се представя анализ на преходни процеси в линейни електрически вериги от първи ред с постоянни независими източници и пасивна резистивна част. Установеният режим преди комутацията и новият установен режим след приключване на преходния процес се определят чрез стационарност на подходящи квадратични функции. Началното условие след комутацията се получава от непрекъснатостта на тока през бобината или на напрежението върху кондензатора при отсъствие на импулсно въздействие. Еквивалентното съпротивление спрямо изводите на реактивния елемент се определя чрез минимум на джауловата мощност в помощна резистивна верига със зададен пробен ток. Това съпротивление се използва за определяне на времеконстантата. След извеждане на общия експоненциален закон преходният процес се построява от получените начална и крайна стойност и времеконстанта. Доказва се минимумът в помощната задача и се представят числени примери за RC и RL вериги.*

Ключови думи: *вариационен анализ, преходен процес, установен режим, еквивалентно съпротивление, времеконстанта, RC верига, RL верига.*

A VARIATIONAL APPROACH TO TRANSIENT ANALYSIS OF FIRST ORDER LINEAR ELECTRIC CIRCUITS

Assist. Prof. Dr. Eng. Miroslava Grisheva Doneva
Technical University of Varna

Abstract: *This paper presents an analysis of transient processes in first-order linear electric circuits with constant independent sources and a passive resistive network. The steady state before switching and the new steady state reached after the transient has decayed are determined from the stationarity conditions of appropriate quadratic functions. The initial condition after switching follows from continuity of the inductor current or capacitor voltage in the absence of impulsive excitation. The equivalent resistance seen at the terminals of the reactive element is determined by minimizing Joule power in an auxiliary resistive network with a prescribed test current. This resistance is used to determine the time constant. After deriving the general exponential response, the transient is constructed from the initial value, the final value, and the time constant. The minimum property of the auxiliary problem is proved, and numerical examples are presented for RC and RL circuits.*

Keywords: *variational analysis, transient response, steady state, equivalent resistance, time constant, RC circuit, RL circuit.*

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

1. Въведение

При анализ на преходни процеси във вериги от първи ред решението може да се представи чрез началната стойност, установената стойност след приключване на преходния процес и времеконстантата. Това позволява динамичната задача да се сведе до определяне на ограничен брой величини, вместо преходът да се проследява числено във всеки момент.

В предходни разработки вариационният подход е съчетан с предавателни коефициенти, числено решаване на диференциални уравнения и корекция чрез енергийния баланс [2,3]. Настоящата постановка разглежда различна последователност: вариационно се определят установените режими и еквивалентното съпротивление, а времевата зависимост се възстановява аналитично. Изменението на тока през бобината или на напрежението върху кондензатора протича по експоненциален закон, характерен за разглежданите линейни вериги от първи ред.

2. Обща постановка и закон на преходния процес

Разглежда се верига с един идеален линеен реактивен елемент, резистори с положителни съпротивления и независими източници. Преди комутацията е достигнат постоянен установен режим. След комутацията топологията и параметрите са постоянни. Приема се крайно положително еквивалентно съпротивление спрямо реактивния елемент, съществуване на единствен установен режим и отсъствие на импулсни токове и напрежения. Зависими източници и нелинейни елементи не се включват в настоящата постановка.

За избраната променлива на състоянието се записва:

$$a\frac{dx}{dt} + bx = c, \qquad a > 0, \quad b > 0. \tag{1}$$

В установен режим производната е нула и се получава:

$$x_{\text{уст}} = \frac{c}{b}. \tag{2}$$

След изваждане на установеното равенство от (1) и въвеждане на отклонението се намира:

$$y = x - x_{\text{уст}}, \qquad \frac{dy}{dt} = -\beta y, \qquad \beta = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tau}. \tag{3}$$

Решението при зададено начално условие е:

$$x(t) = x_{\text{уст}} + [x(0^+) - x_{\text{уст}}]e^{-t/\tau}, \qquad t \geq 0. \tag{4}$$

За RL верига се избира токът през бобината, а за RC верига – напрежението върху кондензатора. Законите за комутация дават съответно:

$$i_L(0^+) = i_L(0^-), \qquad u_C(0^+) = u_C(0^-). \tag{5}$$

Другите клонови токове и напрежения могат да се изменят скокообразно. Затова началният установен режим не се отъждествява с цялото състояние на веригата

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

непосредствено след комутацията. Равенствата (5) се отнасят до съответната променлива на състоянието.

3. Вариационно определяне на установените режими

В постоянен установен режим идеалната бобина се заменя с късо съединение, а кондензаторът – с прекъснат клон. Получените резистивни задачи се решават вариационно чрез токово или потенциално представяне. Изборът се прави според схемата и търсената величина. При потенциалното представяне за пасивната резистивна част се използва принципът на Дирихле [1]. Варират се свободните възлови потенциали и се съставя следната функция:

$$\Phi(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}\sum_{s} G_s\, u_s(\mathbf{v})^2 - \sum_{q} J_q\, u_q(\mathbf{v}), \qquad G_s = \frac{1}{R_s}. \tag{6}$$

Тук първата сума обхваща резисторите. За всеки източник на ток положителната посока на напрежението в последната сума се избира така, че произведението да е отдаваната мощност. Напреженията на идеалните източници на напрежение се въвеждат като ограничения, включително чрез супервъзли. Независими са само свободните потенциали след отчитане на тези ограничения и избора на опорен възел.

Първата вариация на (6) дава възловите уравнения. Втората вариация е:

$$\delta^2\Phi = \sum_{s} G_s\,(\delta u_s)^2 \geq 0. \tag{7}$$

При липса на ненулева допустима вариация с нулево напрежение върху всички резистори минимумът е строг. Така се получава единственото физическо решение. Функцията (6) има размерност на мощност, но не се отъждествява с общата действителна мощност на веригата.

При токовото представяне се избират независими токове, чрез които първият закон на Кирхоф се удовлетворява тъждествено. За резистивна верига с независими източници на напрежение се съставя функция, равна на половината от сумата на джаулови мощности на резисторите, намалена със сумата от произведенията на напреженията на източниците и съответните им токове при генераторно съгласуване. Варират се само независимите токове. Стационарността дава независимите контурни уравнения. При положителни съпротивления и липса на ненулева допустима вариация с нулев ток през всички резистори втората вариация е положителна и решението е строг минимум.

Токовото представяне е използвано в RL примерите чрез функциите (20), (25) и (28), а потенциалното представяне – в RC примерите чрез (14), (42) и (46). Следователно вариационното определяне на установените режими не се ограничава до възлови потенциали. При потенциално решение търсените токове се възстановяват от напреженията и законите на веригата; при токово решение те се получават непосредствено от независимите токове.

Процедурата се изпълнява за топологията на електрическата верига преди и след комутацията. От първото решение се определя началният ток през бобината или

DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

началното напрежение върху кондензатора. От второто се определя съответната нова установена стойност след протичане на преходния процес. При ток през идеално късо съединената бобина той се възстановява от първия закон на Кирхоф след намиране на резистивните токове.

4. Вариационно определяне на еквивалентното съпротивление

Реактивният елемент се отстранява от веригата след комутацията. Независимите източници на напрежение се заменят с къси съединения, а независимите източници на ток – с прекъснати клонове. Към освободените изводи се подава ненулев пробен ток. Използва се класическият принцип на Томсън за минимум на разсейваната мощност [1], приложен тук като стъпка за определяне на времеконстантата. Минимизира се джауловата мощност при всички токове, които удовлетворяват първия закон на Кирхоф и зададения пробен ток:

$$P(\mathbf{i}) = \sum_s R_s\, i_s^2 \;\rightarrow\; \min, \qquad A\mathbf{i} = \mathbf{j}_{\text{пр}}. \tag{8}$$

Матрицата A е редуцираната матрица на инцидентност, а векторът в дясната страна описва подаването и отвеждането на пробния ток. Нека физическото решение е дадено от токовете със звездичка. Всеки друг допустим ток се представя като:

$$\mathbf{i} = \mathbf{i}^* + \delta\mathbf{i}, \qquad A\delta\mathbf{i} = 0. \tag{9}$$

За физическото решение резистивните напрежения са разлики на възлови потенциали. Поради това смесеният член в изменението на мощността е нула:

$$\sum_s R_s\, i_s^*\delta i_s = (\mathbf{v}^*)^T A\delta\mathbf{i} = 0. \tag{10}$$

След разкриване на квадрата в (8) се получава:

$$P(\mathbf{i}) - P(\mathbf{i}^*) = \sum_s R_s\,(\delta i_s)^2 \geq 0. \tag{11}$$

При положителни съпротивления всяка ненулева допустима вариация увеличава мощността. Следователно физическото разпределение на токовете е единствен строг минимум. От входната мощност на помощната верига следва:

$$P_{\min} = U_{\text{пр}} I_{\text{пр}} = R_{\text{екв}} I_{\text{пр}}^2, \qquad R_{\text{екв}} = \frac{P_{\min}}{I_{\text{пр}}^2}. \tag{12}$$

Поради линейността резултатът не зависи от избраната ненулева големина на пробния ток. Времеконстантите са:

$$\tau_L = \frac{L}{R_{\text{екв}}}, \qquad \tau_C = R_{\text{екв}} C. \tag{13}$$

Полученото еквивалентно съпротивление се използва за определяне на времеконстантата на веригата след комутацията съгласно (13). Чрез нея и вариационно

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

намерените начална и установена стойност преходният процес се записва по общата зависимост (4).

5. Последователност на решението

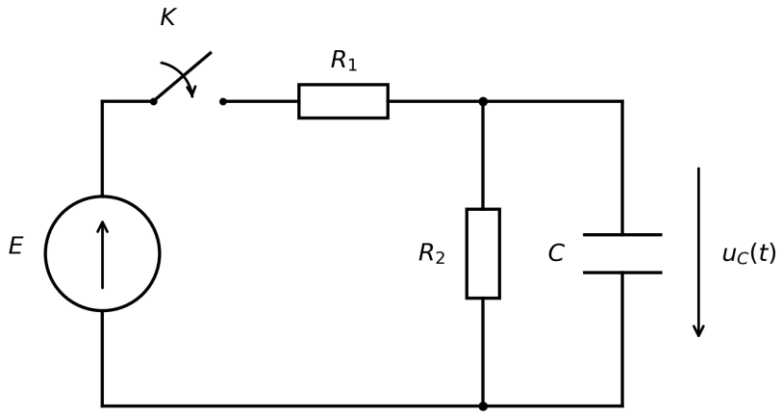
Първо се решава вариационно установеният режим преди комутацията. Чрез (5) се определя началното условие след нея. След това се решава вариационно новият установен режим. Създава се помощната резистивна верига и чрез (8)–(12) се определя еквивалентното съпротивление. Изчислява се времеконстантата по (13), а преходната зависимост се записва по (4).

Проверката включва началното условие, границата при неограничено нарастване на времето и изпълнението на уравнението на веригата. При необходимост останалите токове и напрежения се възстановяват чрез алгебричните зависимости и зависимостта на реактивния елемент. Не се извършва числено интегриране по времеви стъпки; алгебричните вариационни задачи могат да изискват числено решаване при големи мрежи.

6. Числени примери

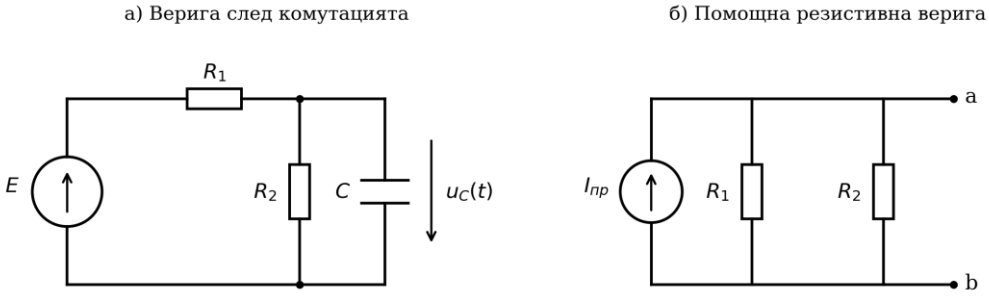
6.1. RC верига с нулево начално напрежение

Източник с постоянно напрежение E = 5 V се свързва през резистор R_1 = 50 Ω към паралелно съединени резистор R_2 = 50 Ω и кондензатор C = 50 μF. Схемата на условието е представена на фиг. 1. Преди комутацията ключът е отворен, а кондензаторът е разреден. При t = 0 ключът се затваря. Веригата след комутацията и помощната резистивна верига са представени на фиг. 2.



Фиг. 1. Схема на RC веригата преди комутацията

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86



Фиг. 2. RC верига и помощна задача за еквивалентното съпротивление

За установеното напрежение върху кондензатора се съставя:

$$F(u) = \frac{(E-u)^2}{2R_1} + \frac{u^2}{2R_2}, \qquad F'(u) = \frac{u-E}{R_1} + \frac{u}{R_2}. \tag{14}$$

Условието за стационарност и проверката за минимум дават:

$$u_{C,\text{уст}} = \frac{ER_2}{R_1+R_2} = 2{,}5\ \text{V}, \qquad F'' = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} > 0. \tag{15}$$

В помощната верига резисторите са паралелни. При зададен пробен ток се варира токът през първия резистор:

$$P(i_1) = R_1 i_1^2 + R_2(I_{\text{пр}} - i_1)^2, \qquad i_1^* = \frac{R_2 I_{\text{пр}}}{R_1+R_2}. \tag{16}$$

Втората производна е положителна и се получава:

$$R_{\text{екв}} = 25\ \Omega, \qquad \tau = 1{,}25\ \text{ms}, \qquad \beta = 800\ \text{s}^{-1}. \tag{17}$$

Окончателното решение в буквен и числен вид, при време в секунди, е:

$$u_C(t) = \frac{ER_2}{R_1+R_2}\left(1 - e^{-t/\tau_C}\right), \quad \tau_C = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2}C.$$
$$u_C(t) = 2{,}5\left(1 - e^{-800t}\right)\ \text{V}. \tag{18}$$

То удовлетворява началното условие и има граница 2,5 V. Независимата проверка чрез уравнението на веригата дава:

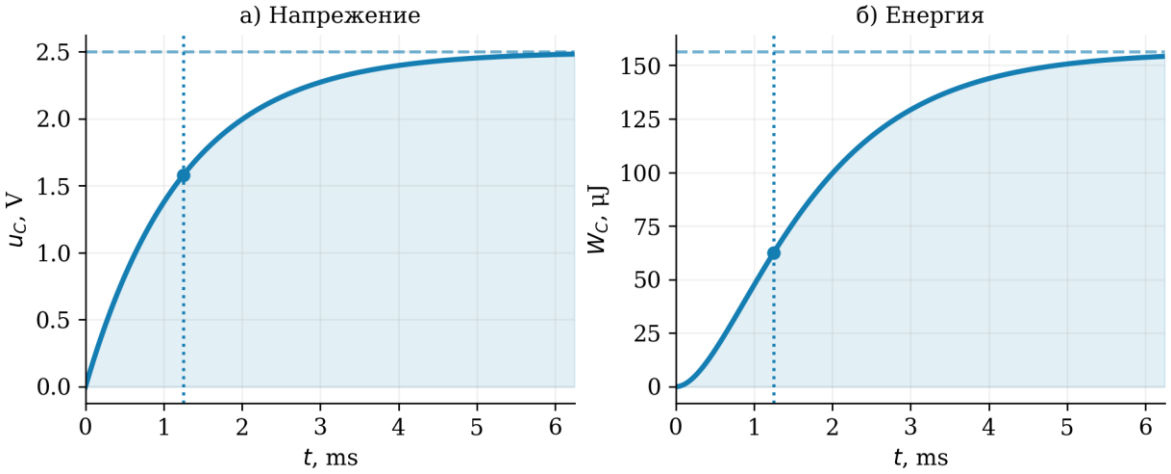
$$C\frac{du_C}{dt} + \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)u_C = \frac{E}{R_1}. \tag{19}$$

След заместване на (18) равенството се изпълнява за всяко неотрицателно време. Енергията в бобината и кондензатора се определя съответно чрез:

$$W_L(t) = \frac{Li_L^2(t)}{2}, \qquad W_C(t) = \frac{Cu_C^2(t)}{2}.$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

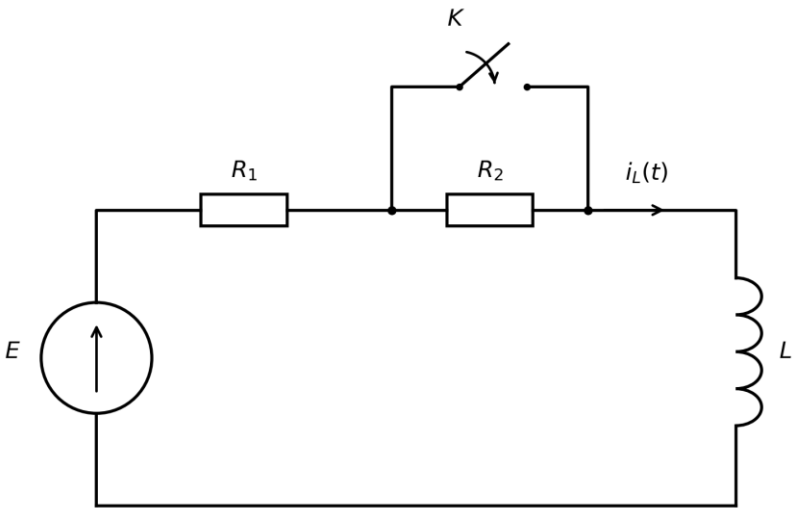
На фиг. 3 са представени измененията във времето на напрежението върху кондензатора и натрупаната електрическа енергия. Вертикалният пунктир и отбелязаните точки съответстват на момента t = τ; хоризонталните пунктири показват установените стойности.



Фиг. 3. Напрежение и енергия на кондензатора в RC веригата

6.2. RL верига с ненулев начален ток

Дадена е последователна RL верига с постоянен източник E = 20 V, резистори R_1 = R_2 = 10 Ω и бобина L = 0,2 H. Ключът K е свързан паралелно на R_2. Преди комутацията ключът е отворен и е достигнат установен режим. При t = 0 ключът се затваря и шунтира R_2. Схемата на условието е представена на фиг. 4. За двата установени режима се използват:



Фиг. 4. RL верига с постоянен източник и шунтиране на R_2 при t = 0

$$F_{-}(i) = \frac{R_1 + R_2}{2} i^2 - Ei, \qquad F_{+}(i) = \frac{R_1}{2} i^2 - Ei. \tag{20}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

Стационарните точки са строги минимуми: втората производна преди комутацията е $R_1 + R_2 = 20\ \Omega$, а за новия установен режим е $R_1 = 10\ \Omega$. Получават се:

$$i_L(0^-) = 1\ \text{A}, \qquad i_L(0^+) = 1\ \text{A}, \qquad i_{L,\text{уст}} = 2\ \text{A}. \tag{21}$$

В помощната верига след комутацията R_2 е шунтиран. След отстраняване на бобината и зануляване на източника пробният ток протича през R_1. Допустимото множество има само едно разпределение на токовете, поради което минимумът е тривиален и дава еквивалентно съпротивление 10 Ω. Решението в буквен и числен вид, при време в секунди, е:

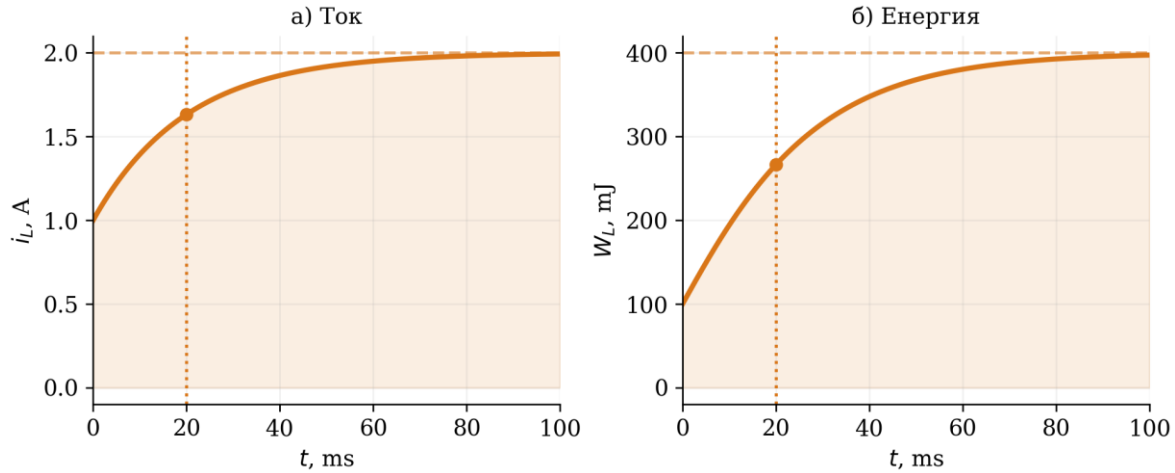
$$i_L(t) = \frac{E}{R_1} + \left(\frac{E}{R_1 + R_2} - \frac{E}{R_1}\right) e^{-t/\tau_L}, \quad \tau_L = \frac{L}{R_1}.$$
$$\tau = 0{,}02\ \text{s}, \qquad i_L(t) = 2 - e^{-50t}\ \text{A}. \tag{22}$$

При заместване в уравнението се получава:

$$0{,}2\frac{di_L}{dt} + 10 i_L = 20. \tag{23}$$

Началната стойност е 1 A, крайната е 2 A, а след една времеконстанта токът е приблизително 1,6321 A. Запасената магнитна енергия на бобината се изменя от 0,1 J преди комутацията до 0,4 J в новия установен режим съгласно зависимостта $W = Li^2/2$. Преходният процес се предизвиква от промяната на схемата при постоянен източник.

На фиг. 5 са представени измененията във времето на тока през бобината и натрупаната магнитна енергия. Вертикалният пунктир и отбелязаните точки съответстват на момента $t = \tau$; хоризонталните пунктири показват установените стойности.



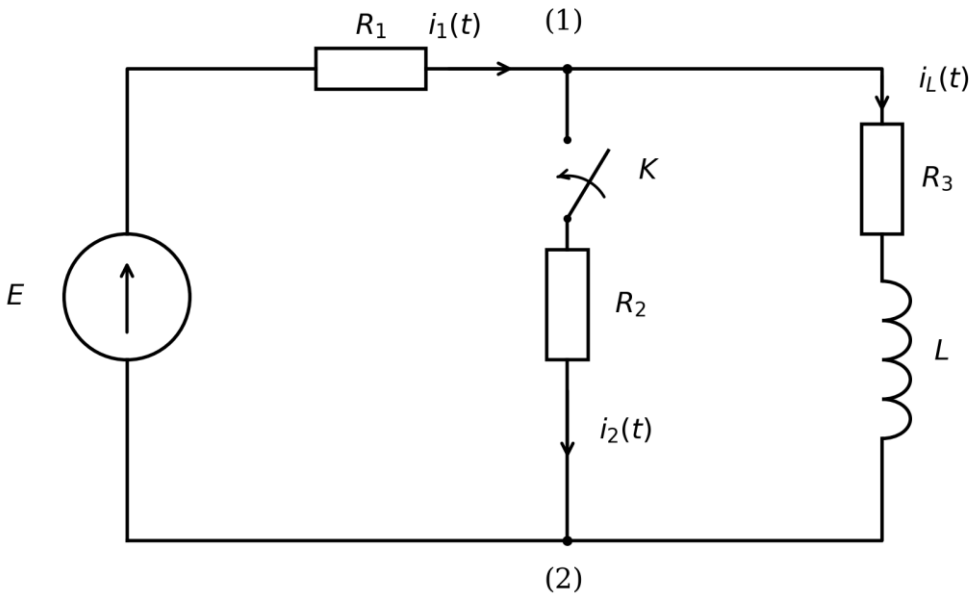
Фиг. 5. Ток и енергия на бобината в RL веригата

6.3. Разклонена RL верига при включване на резистивен клон

Разглежда се веригата от фиг. 6. Източникът E и резисторът R_1 захранват два клона: ключ K и резистор R_2 в средния клон и последователно съединени резистор R_3 и бобина L в десния клон. Преди комутацията ключът е отворен и е достигнат установен режим. В момента $t = 0$ ключът се затваря. Приемат се следните стойности:

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

$$E = 20\ \text{V}, \quad R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega, \quad L = 0{,}3\ \text{H}. \tag{24}$$



Фиг. 6. Разклонена RL верига с включване на клона с R_2 при t = 0

При отворен ключ токът в средния клон е нула. В установения режим бобината се заменя с късо съединение и през R_1 и R_3 протича един и същ ток. За неговото вариационно определяне се съставя:

$$F_{-}(i) = \frac{1}{2}(R_1 + R_3)i^2 - Ei = 10i^2 - 20i. \tag{25}$$

Условието за стационарност и втората производна са:

$$F_{-}'(i) = 20i - 20 = 0, \qquad F_{-}''(i) = 20 > 0. \tag{26}$$

Следователно се получава строг минимум. Началното условие след комутацията се определя от непрекъснатостта на тока през бобината:

$$i_L(0^-) = 1\ \text{A}, \qquad i_L(0^+) = i_L(0^-) = 1\ \text{A}. \tag{27}$$

За новия установен режим при затворен ключ се избират независимите токове i_2 и i_L. Първият закон на Кирхоф се удовлетворява за всички допустими вариации чрез заместването $i_1 = i_2 + i_L$. Бобината отново има нулево установено напрежение. Съставя се:

$$F_{+}(i_2, i_L) = \frac{R_1}{2}(i_2 + i_L)^2 + \frac{R_2}{2}i_2^2 + \frac{R_3}{2}i_L^2 - E(i_2 + i_L). \tag{28}$$

Независимото вариране на двата тока дава:

$$\frac{\partial F_{+}}{\partial i_2} = R_1(i_2 + i_L) + R_2 i_2 - E = 0, \tag{29}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

$$\frac{\partial F_+}{\partial i_L} = R_1(i_2 + i_L) + R_3 i_L - E = 0. \tag{30}$$

След заместване на параметрите се решава системата:

$$20i_2 + 10i_L = 20, \qquad 10i_2 + 20i_L = 20. \tag{31}$$

Получават се установените токове:

$$i_{2,\text{уст}} = i_{L,\text{уст}} = \frac{2}{3}\ \text{A}, \qquad i_{1,\text{уст}} = \frac{4}{3}\ \text{A}. \tag{32}$$

За проверка на характера на стационарната точка се използва втората вариация:

$$\delta^2 F_+ = R_1(\delta i_2 + \delta i_L)^2 + R_2(\delta i_2)^2 + R_3(\delta i_L)^2. \tag{33}$$

Тя е положителна за всяка ненулева двойка вариации. Следователно намереното решение е единствен строг минимум.

За определяне на еквивалентното съпротивление бобината се отстранява, източникът се заменя с късо съединение, а ключът остава затворен. Пробният ток преминава през R_3 и след това се разделя между R_1 и R_2. В помощната задача се използват собствени посоки на токовете, които могат да се различават от посоките на фиг. 6. Ако токът през R_1 е z, през R_2 протича разликата между пробния ток и z. При фиксиран пробен ток се минимизира:

$$P(z) = R_3 I_{\text{пр}}^2 + R_1 z^2 + R_2(I_{\text{пр}} - z)^2. \tag{34}$$

Условието за минимум дава:

$$P'(z) = 2R_1 z - 2R_2(I_{\text{пр}} - z) = 0, \qquad z^* = \frac{I_{\text{пр}}}{2}. \tag{35}$$

Втората производна е $2(R_1 + R_2) = 40 > 0$. След заместване на оптималното разпределение се намира:

$$P_{\min} = 15 I_{\text{пр}}^2, \qquad R_{\text{екв}} = \frac{P_{\min}}{I_{\text{пр}}^2} = 15\ \Omega. \tag{36}$$

Времеконстантата и коефициентът на затихване са:

$$\tau = \frac{L}{R_{\text{екв}}} = 0{,}02\ \text{s}, \qquad \beta = 50\ \text{s}^{-1}. \tag{37}$$

Чрез началната и новата установена стойност се построява преходният ток, при време в секунди:

$$i_L(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}e^{-50t}\ \text{A}, \qquad t \geq 0. \tag{38}$$

За независима проверка след комутацията се използва равенството:

$$E = R_1(i_2 + i_L) + R_2 i_2, \qquad L\frac{di_L}{dt} + R_3 i_L = R_2 i_2. \tag{39}$$

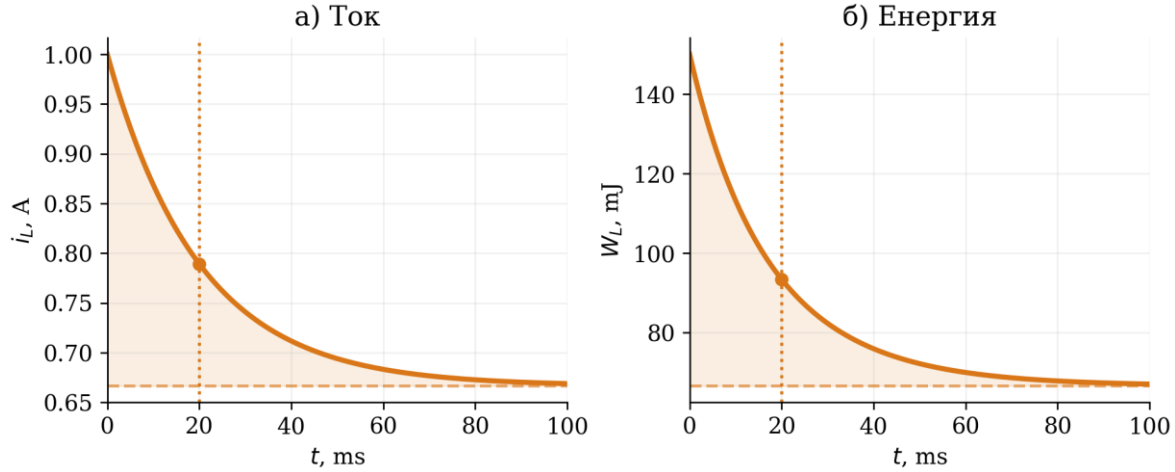
Останалите клонови токове се възстановяват алгебрично:

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

$$i_2(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}e^{-50t}\ \text{A}, \qquad i_1(t) = \frac{4}{3} + \frac{1}{6}e^{-50t}\ \text{A}. \tag{40}$$

Посредством вариационен анализ са определени установените режими и еквивалентното съпротивление, чрез които са получени преходните зависимости на трите клонови тока.

На фиг. 7 са представени измененията във времето на тока през бобината и натрупаната магнитна енергия. Вертикалният пунктир и отбелязаните точки съответстват на момента t = τ; хоризонталните пунктири показват установените стойности.



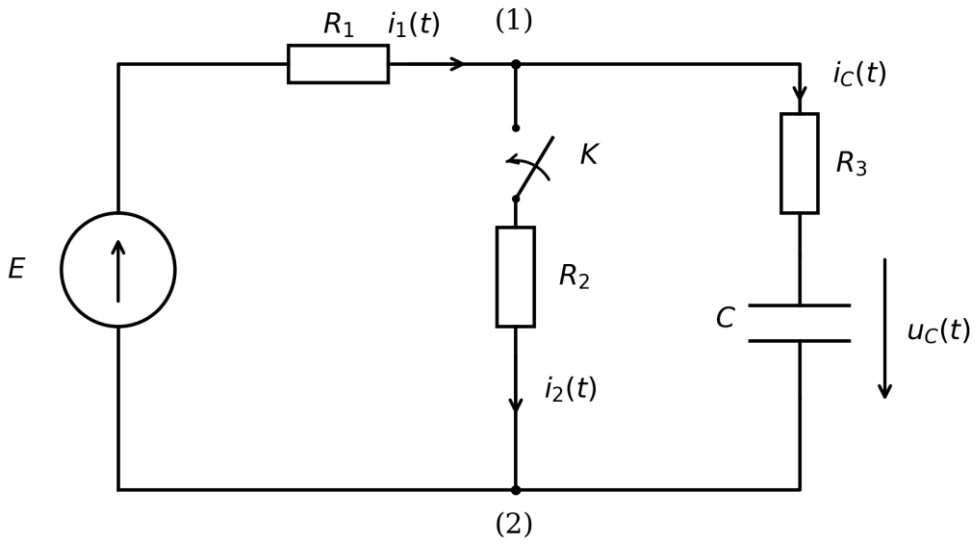
Фиг. 7. Ток и енергия на бобината в разклонената RL верига

6.4. Разклонена RC верига при включване на резистивен клон

Разглежда се веригата от фиг. 8. Източникът E през резистора R_1 захранва среден клон с ключ K и резистор R_2 и десен клон с последователно съединени резистор R_3 и кондензатор C. Преди комутацията ключът е отворен и е достигнат установен режим. При t = 0 ключът се затваря. Приемат се:

$$E = 20\ \text{V}, \quad R_1 = R_2 = R_3 = 10\ \Omega, \quad C = 100\ \mu\text{F}. \tag{41}$$

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86



Фиг. 8. Разклонена RC верига с включване на клона с R_2 при t = 0

При отворен ключ източникът зарежда кондензатора до напрежение E, а в установения режим токът е нула. За потенциала v на възел (1) и напрежението u на кондензатора спрямо долния възел се съставя:

$$\Phi_-(v,u) = \frac{(E-v)^2}{2R_1} + \frac{(v-u)^2}{2R_3}. \tag{42}$$

От независимото вариране на двата потенциала следва:

$$\frac{\partial \Phi_-}{\partial v} = \frac{v-E}{R_1} + \frac{v-u}{R_3} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_-}{\partial u} = \frac{u-v}{R_3} = 0. \tag{43}$$

Получава се u = v = E. Втората вариация е:

$$\delta^2\Phi_- = \frac{(\delta v)^2}{R_1} + \frac{(\delta v - \delta u)^2}{R_3} > 0. \tag{44}$$

Неравенството е строго за всяка ненулева двойка вариации, което доказва единствен строг минимум. От закона за комутация се намира:

$$u_C(0^-) = 20\ \text{V}, \qquad u_C(0^+) = u_C(0^-) = 20\ \text{V}. \tag{45}$$

За новия установен режим при затворен ключ се добавя членът за включения резистор R_2. Кондензаторът отново е прекъснат за постоянния установен ток. Съставя се:

$$\Phi_+(v,u) = \frac{(E-v)^2}{2R_1} + \frac{v^2}{2R_2} + \frac{(v-u)^2}{2R_3}. \tag{46}$$

Условията за стационарност са:

$$\frac{\partial \Phi_+}{\partial v} = \frac{v-E}{R_1} + \frac{v}{R_2} + \frac{v-u}{R_3} = 0, \qquad \frac{\partial \Phi_+}{\partial u} = \frac{u-v}{R_3} = 0. \tag{47}$$

DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

Следователно u = v, а новото установено напрежение е:

$$u_{C,\text{уст}} = v_{\text{уст}} = \frac{ER_2}{R_1 + R_2} = 10 \text{ V}. \tag{48}$$

Проверката за минимум се извършва чрез:

$$\delta^2\Phi_+ = \frac{(\delta v)^2}{R_1} + \frac{(\delta v)^2}{R_2} + \frac{(\delta v - \delta u)^2}{R_3} > 0. \tag{49}$$

Отново неравенството е строго за всяка ненулева допустима двойка вариации. Полученият установен режим е единствен строг минимум.

За определяне на еквивалентното съпротивление кондензаторът се отстранява, източникът на напрежение се заменя с късо съединение, а ключът остава затворен. Към изводите на кондензатора се подава пробен ток. Той протича през R_3 и се разделя между R_1 и R_2. При ток z през R_1 се минимизира:

$$P(z) = R_3 I_{\text{пр}}^2 + R_1 z^2 + R_2 (I_{\text{пр}} - z)^2. \tag{50}$$

Условието за минимум и втората производна дават:

$$P'(z) = 2R_1 z - 2R_2 (I_{\text{пр}} - z) = 0, \qquad z^* = \frac{I_{\text{пр}}}{2}, \qquad P'' = 40 > 0. \tag{51}$$

След заместване на оптималното разпределение се получава:

$$R_{\text{екв}} = \frac{P_{\min}}{I_{\text{пр}}^2} = 15\ \Omega, \qquad \tau = R_{\text{екв}} C = 1{,}5 \text{ ms}. \tag{52}$$

Чрез двете вариационно намерени напрежения и времеконстантата се построява преходът. При времеконстанта, определена с (52):

$$u_C(t) = 10 + 10e^{-t/\tau} \text{ V}, \qquad t \geq 0. \tag{53}$$

За независима проверка еквивалентният източник спрямо кондензатора има напрежение 10 V и съпротивление 15 Ω. Уравнението на преходния процес е:

$$0{,}0015 \frac{du_C}{dt} + u_C = 10. \tag{54}$$

При положителна посока на кондензаторния ток надолу, както на фиг. 8, останалите зависимости са:

$$i_C(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{2}{3} e^{-t/\tau} \text{ A}, \qquad v(t) = 10 + \frac{10}{3} e^{-t/\tau} \text{ V}. \tag{55}$$

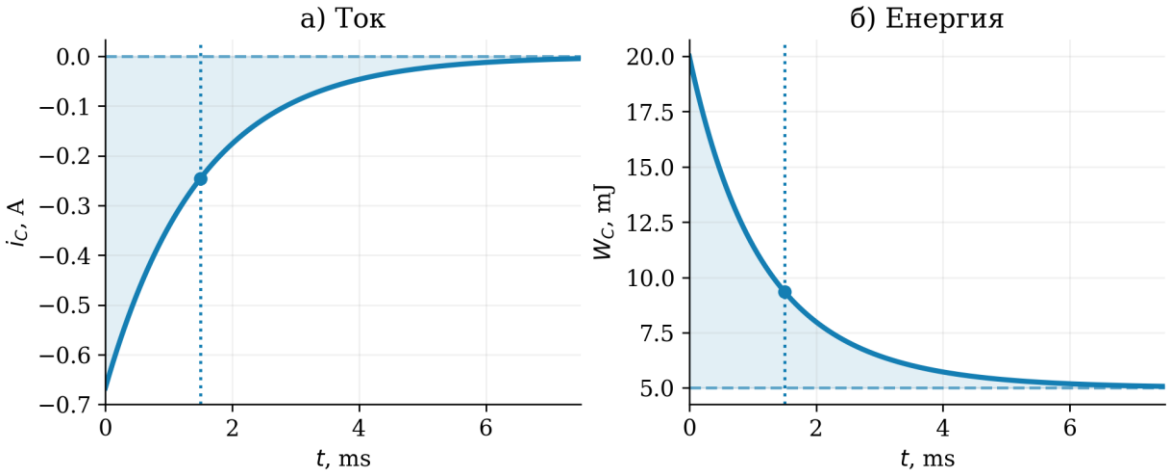
$$i_1(t) = 1 - \frac{1}{3} e^{-t/\tau} \text{ A}, \qquad i_2(t) = 1 + \frac{1}{3} e^{-t/\tau} \text{ A}. \tag{56}$$

За всяко време след комутацията е изпълнено $i_1 = i_2 + i_C$. Отрицателният кондензаторен ток показва, че действителната му посока е противоположна на избраната и кондензаторът отдава енергия при намаляване на напрежението си.

На фиг. 9 са представени измененията във времето на тока през кондензатора и натрупаната електрическа енергия. Вертикалният пунктир и отбелязаните точки

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

съответстват на момента t = τ; хоризонталните пунктири показват установените стойности.



Фиг. 9. Ток и енергия на кондензатора в разклонената RC верига

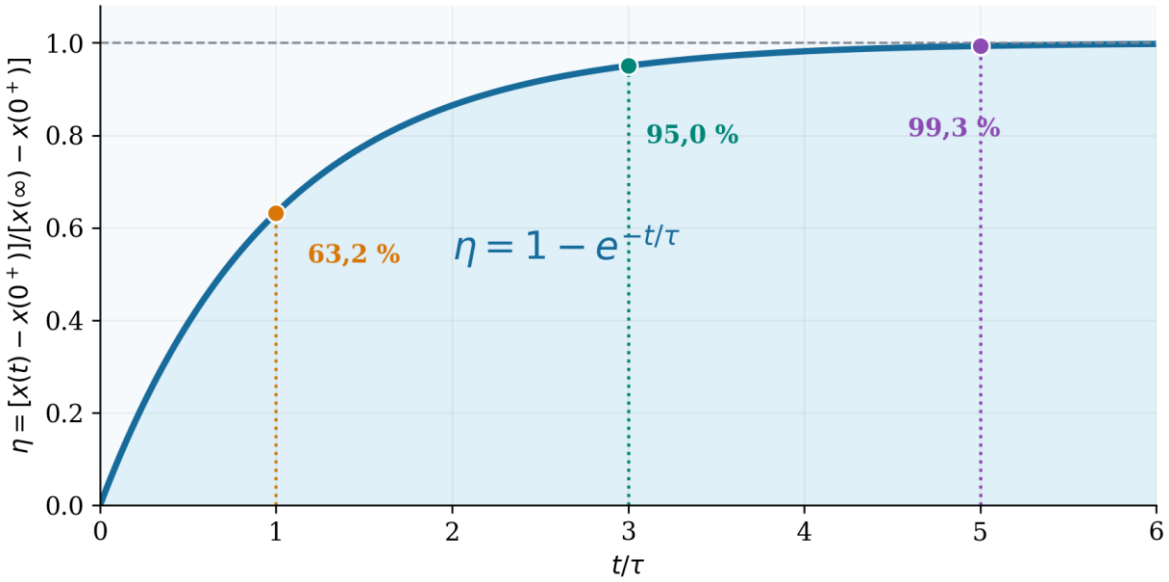
7. Заключение

Представената постановка разделя решението на две установени задачи, закон за комутация и помощна задача за еквивалентното съпротивление. Вариационното определяне на това съпротивление свързва минимума на джауловата мощност с времеконстантата. Доказателството (9)–(12) обосновава тази стъпка независимо от конкретната топология на пасивната резистивна мрежа.

Числените примери потвърждават съвпадението с класическото решение. Получената последователност позволява преходният процес да се построи чрез вариационно определени установени стойности и еквивалентно съпротивление. Общият експоненциален закон свързва тези резултати в единно аналитично решение.

ТЕХНИЧЕСКИ УНИВЕРСИТЕТ - ВАРНА
Technical University of Varna
е-списание ТУ-Варна
ISSN 3033-2559
OPEN ACCESS
DOI : https://doi.org/10.29114/ejtuv.vol1.iss3.86

На фиг. 10 е показано относителното изменение на променливата на състоянието спрямо времето, отнесено към времеконстантата. След нормализиране преходите в четирите примера се описват с една и съща крива: при τ, 3τ и 5τ са достигнати съответно 63,2 %, 95,0 % и 99,3 % от общото изменение.



Фиг. 10. Нормализирано изменение на променливата на състоянието в разгледаните RC и RL вериги

Използвана литература

1. Doyle, P. G. & Snell, J. L. Random Walks and Electric Networks. Mathematical Association of America, 1984. Свободно електронно издание, версия от 5 юли 2006 г., раздел 1.3.5 и упражнение 1.3.11. https://math.dartmouth.edu/~doyle/docs/walks/walks.pdf
2. Panov, E. I. & Doneva, M. Gr. Exploration of the possibilities of the variational approach for analysis of transient processes in electric circuits. Electrotechnica & Electronica, 51(9–10), 2016, pp. 23–31. https://epluse.ceec.bg/exploration-of-the-possibilities-of-the-variational-approach-for-analysis-of-transient-processes-in-electric-circuits/
3. Panov, E. I. & Doneva, M. Gr. Variational Approach for Analysis of Transient Processes in Electric Circuits. Proceedings of SIELA 2016, pp. 242–245. DOI: 10.1109/SIELA.2016.7543031.