

ИНТЕГРИРАНО ФИЗИКО-СТАТИСТИЧЕСКО МОДЕЛИРАНЕ, ИДЕНТИФИКАЦИЯ НА ПАРАМЕТРИТЕ И РОБАСТНА МНОГОКРИТЕРИАЛНА ОПТИМИЗАЦИЯ НА ЛАЗЕРНОТО ПОВЪРХНОСТНО УЯКЧАВАНЕ НА ЦИЛИНДРИЧНИ ПРОБИ С LUX-2000

Доц. д-р инж. Ярослав Аргиров

Технически университет - Варна

Инж. Николай Щерионов

Технически университет - Варна

Инж. Апостол Учреджиев

Технически университет - Варна

Резюме: Целта на настоящото изследване е да се изгради локално валидна, физически интерпретируема и статистически проверима рамка за идентификация, сравнителна оценка и робастен избор на технологични режими при лазерно повърхностно уякчаване на цилиндрични проби с диаметър 30 mm и дебелина 10 mm. Анализът се основава на балансиран факторен поднабор $2 \times 2 \times 3$, включващ дванадесет съпоставими режима при мощност $P \in \{200, 300\}$ W, ширина на лазерния лъч $b \in \{1, 2\}$ mm и скорост $V \in \{176, 245, 314\}$ mm/min. В рамките на методологията са формулирани кинематични, енергийни и безразмерни показатели, идентифициран е лог-линеен степенен модел и са приложени информационният критерий AICc, leave-one-out кръстосана валидация, остатъчна диагностика, локален анализ на чувствителността, Парето-доминиране и вероятно ограничена оптимизация.

Полученият модел $\hat{h}_u = 55,5407(P/200)^{4,1960}(2/b)^{0,7932}(314/V)^{0,7982}$ обяснява $R^2 = 0,9766$ от вариацията на $\ln(h_u)$, като стойността на LOO-RMSE е 0,222. Максималната експериментално измерена дълбочина на уякчената зона $h_u = 848 \mu m$ е регистрирана при режим с мощност 300 W, ширина на лъча 1 mm и скорост 176 mm/min. Същевременно режимът 4/314 осигурява дълбочина $h_u = 648 \mu m$ при 43,95% по-ниска сравнителна площна енергия и 78,41% по-висока скорост спрямо режима, при който е постигнат абсолютният максимум. Научната новост и основният методологичен принос на разработката се състоят в предложената единна йерархия на доказателството, която формално разграничава прякото експериментално наблюдение, емпиричната идентификация, физичната хипотеза и сценарната вероятност. Получените вероятностни оценки следва да се разглеждат като условни поради липсата на повторни изпитвания и независима оценка на чистата експериментална грешка. Валидността на изведения модел е ограничена до изследваната област на технологичните параметри, поради което екстраполация на резултатите към номиналната максимална мощност на лазерната система от 2000 W не се допуска.

Ключови думи: лазерно повърхностно уякчаване, дълбочина на уякчената зона, физико-статистическо моделиране, идентификация на параметрите, степенен регресионен модел, крътосана валидация, Парето оптимизация, робастна многокритериална оптимизация.

INTEGRATED PHYSICS-BASED STATISTICAL MODELING, PARAMETER IDENTIFICATION, AND ROBUST MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION OF LASER SURFACE HARDENING OF CYLINDRICAL SPECIMENS USING THE LUX-2000 SYSTEM

Assoc. Prof. Dr. Eng. Yaroslav Argirov

Technical University – Varna

Eng. Nikolay Shterionov

Technical University – Varna

Eng. Apostol Ucherdzhev

Technical University – Varna

Abstract: The objective of this study is to develop a locally valid, physically interpretable, and statistically verifiable framework for parameter identification, comparative evaluation, and robust selection of processing conditions for the laser surface hardening of cylindrical specimens with a diameter of 30 mm and a thickness of 10 mm. The analysis is based on a balanced $(2 \times 2 \times 3)$ factorial subset comprising twelve comparable processing conditions at laser power ($P \in \{200, 300\}$) W, laser-beam width ($b \in \{1, 2\}$) mm, and scanning speed ($V \in \{176, 245, 314\}$) mm/min. The methodology includes the formulation of kinematic, energy-based, and dimensionless indicators; identification of a log-linear power-law model; and application of the corrected Akaike information criterion (AICc), leave-one-out cross-validation, residual diagnostics, local sensitivity analysis, Pareto dominance, and chance-constrained optimization.

The resulting model, $h_u = 55,5407(P/200)^4,1960(2/b)^{0,7932}(314/V)^{0,7982}$ explains ($R^2 = 0.9766$) of the variation in $(\ln(h_u))$, with a leave-one-out root-mean-square error (LOO-RMSE) of 0.222. The maximum experimentally measured hardened-zone depth, ($h_u = 848 \mu\text{m}$), was obtained at a laser power of 300 W, a beam width of 1 mm, and a scanning speed of 176 mm/min. At the same time, processing condition 4/314 provided a hardened-zone depth of ($h_u = 648 \mu\text{m}$), with a 43.95% lower relative areal energy input and a 78.41% higher scanning speed than the condition producing the absolute maximum. The scientific novelty and principal methodological contribution of the study lie in the proposed unified hierarchy of evidence, which formally distinguishes direct experimental observation, empirical identification, physical hypothesis, and scenario-based probability. The resulting probabilistic estimates should be regarded as conditional because of the absence of replicated trials and an independent estimate of pure experimental error. The validity of the derived model is restricted to the investigated processing-parameter domain; therefore, extrapolation of the results to the nominal maximum laser-system power of 2000 W is not permissible.

Keywords: *laser surface hardening, hardened-zone depth, physics-based statistical modeling, parameter identification, power-law regression model, cross-validation, Pareto optimization, robust multi-objective optimization*

1. Научен контекст и постановка на проблема

Лазерното повърхностно уякчаване е пространствено локализиран термичен процес, при който интензивното нагряване и последващото самоохладяване от студената сърцевина формират трансформационно изменен слой. Принципите на лазерната обработка, движещите се топлинни източници и инженерните ограничения са систематизирани от Steen и Mazumder [1] и Ion [2]. Класическият анализ на Ashby и Easterling [3] показва, че дълбочината на преобразуване е резултат от съвместното действие на плътността на потока, времето над критичната температура и скоростта на охлаждане, а не на един изолиран параметър.

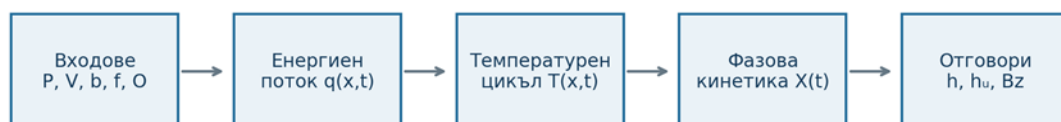
При цилиндрична геометрия оптиката, въртенето и осцилацията се свързват в нестационарна гранична задача. Практическият критерий „максимална дълбочина“ е недостатъчен: по-ниската скорост увеличава локалното натоварване и времето на цикъла; тесният лъч повишава интензивността, но ограничава ширината на следата; по-високата мощност може да премине от желана аустенитизация към топене или нежелано отвърщане. Следователно оптималността е отношение между целева функция, ограничения и допустим риск.

1.1. Научна празнина

Предоставеният масив съдържа 15 технологични проби, но пълни количествени отговори h и h_u са налични главно за проби 1-4. При тях фокусът, осцилацията, началното термично състояние и липсата на застъпване са фиксирани. Това позволява локална идентификация по P , b и V , но не и глобално причинно заключение за всички зададени фактори. Липсата на повторения допълнително прави невъзможно отделянето на възпроизводимостта от липсата на съответствие на модела.

1.2. Изследователски хипотези

H_1 : в изследвания диапазон h_u нараства с P и намалява с b и V . H_2 : режимът, който максимизира h_u , не съвпада непременно с режима, който минимизира енергийното натоварване при зададен праг. H_3 : при малка извадка главно-ефектният степенен модел има по-добър баланс между съответствие и сложност от наситен модел с взаимодействия. H_4 : вероятността за правилен избор може да бъде оценявана само условно спрямо явно зададена дисперсия.



Идентифицируема пряка връзка в наличния набор: $(P, V, b) \rightarrow h_u$

Фигура 1. Йерархична физико-статистическа структура на процеса

2. Обект, данни и експериментална архитектура

Обектът е цилиндрична проба с $D=30$ mm, радиус $R=15$ mm и аксиална дебелина $H=10$ mm. Източникът LUX-2000 има номинална максимална мощност 2000 W, но наблюдаваните режими използват 200 и 300 W, т.е. съответно 10% и 15% от номиналния максимум. За основния поднабор скоростта на осцилация е 300 mm/s, фокусното разстояние е 4 mm, материалът е в отгрято състояние и следите са без застъпване.

Таблица 1. Контролиран факторен поднабор 2×2×3 и наблюдавани отговори

Режим	P, W	b, mm	V, mm/min	h, μ m	h _a , μ m	q _a , J/mm ²
1/314	200	2	314	70	57	19,11
1/245	200	2	245	100	70	24,49
1/176	200	2	176	140	112	34,09
2/314	300	2	314	392	305	28,66
2/245	300	2	245	527	357	36,73
2/176	300	2	176	540	372	51,14
3/314	200	1	314	110	80	38,22
3/245	200	1	245	157	100	48,98
3/176	200	1	176	200	160	68,18
4/314	300	1	314	771	648	57,32
4/245	300	1	245	874	697	73,47
4/176	300	1	176	1016	848	102,27

Стойностите са възприети като предоставени експериментални резултати. Ако са отчетени от диаграми, възможната грешка на дигитализацията е включена неявно в общата остатъчна вариация. Празните клетки в останалите проби не се заместват с нули. Проби 12-13 се анализират отделно, защото са в подобро начално състояние и не съдържат h_ц.

Таблица 2. Номенклатура и статус на величините.

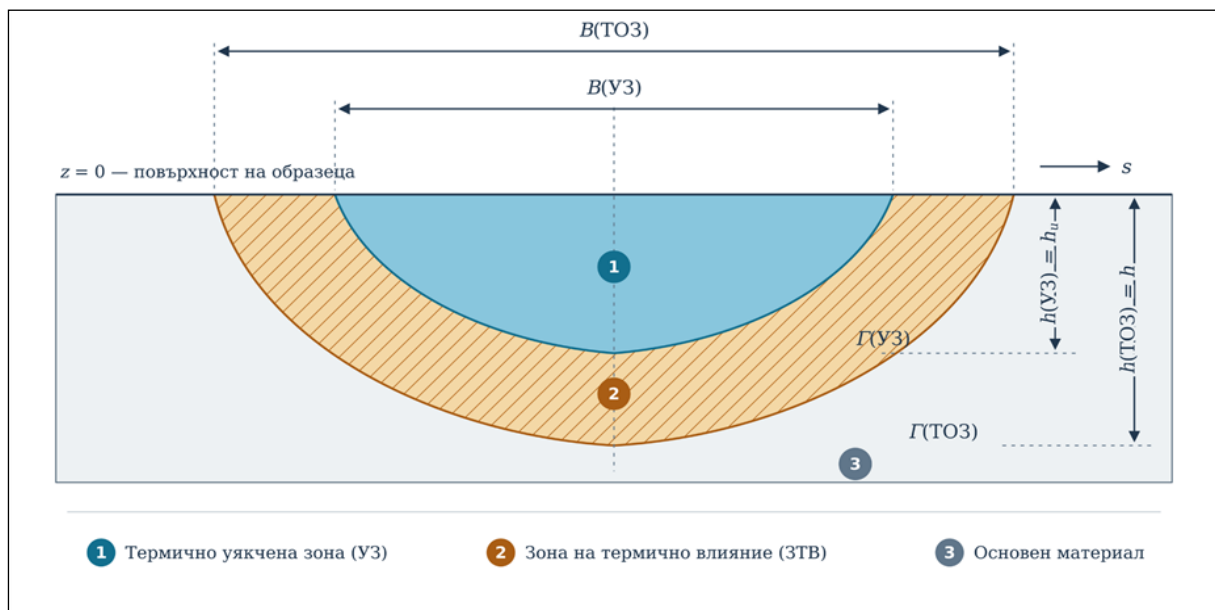
Символ	Определение	Единица / статус
P	лазерна мощност в експеримента	W; 200-300
V	приета периферна линейна скорост	mm/min; 176-314
b	номинална ширина на лъча/следата	mm; 1-2
f	фокусно разстояние	mm; 4 в основния набор
h, h _a	обща и уякчена дълбочина	μ m; измерени отговори
q _l , q _a	линейна и сравнителна площна енергия	J/mm; J/mm ²
η	ефективна поглъщателна способност	неизмерена
σ	стандартно отклонение на повторемостта	неизмерено; сценарно

Граница на съпоставимост. Основните числени изводи са валидни само за P=200-300 W, b=1-2 mm, V=176-314 mm/min и фиксираните съпътстващи условия. Няма емпирично основание за прогноза при 2000 W.

3. Геометрия и кинематика на цилиндричната проба

Основните геометрични характеристики се получават точно от зададените размери. Те са необходими за преобразуване между линейна и ъглова скорост, за оценка на времето на оборот и за нормализиране на дълбочината спрямо дебелината на пробата.

Схема 1 дефинира геометричните показатели в локални цилиндрични координати $s=R\theta$ и $z=R-r$. За $i \in \{TO3, Y3\}$ метричните оценки са $B(i)=R\Delta\theta(i)$ и $h(i)=\max_s[R-r\Gamma(i)(s)]$. Ширините $B(i)$ са дъгови дължини по повърхността и не трябва да се отъждествяват с номиналната ширина b на лазерния лъч; приетите означения са $h(TO3)=h$ и $h(Y3)=h_u$.



Фигура 2. Геометрични показатели на термично обработената и уякчената зона: ширини B , дълбочини h и операционни граници Γ . Схематично, без мащаб; $\Gamma(Y3)$ и $\Gamma(TO3)$ се задават по предварително приети критерии $H(thr)$ и $\Psi(thr)$

$$C=\pi D=94,2478 \text{ mm}; A_0=\pi R^2=706,8583 \text{ mm}^2 \quad (1)$$

$$V(cyl)=\pi R^2 H=7068,5835 \text{ mm}^3; A(lat)=\pi D H=942,4778 \text{ mm}^2 \quad (2)$$

$$A(tot)=2\pi R(R+H)=2356,1945 \text{ mm}^2 \quad (3)$$

3.1. Преобразуване на скоростта

Ако V е периферна скорост, еквивалентната честота n , ъгловата скорост ω и времето за оборот T_o са:

$$n=V/(\pi D); \omega=V/(60R); T_o=60\pi D/V \quad (4)$$

Таблица 3. Кинематична съгласуваност за $D=30 \text{ mm}$.

$V, \text{ mm/min}$	$n_{eq}, \text{ min}^{-1}$	$\omega, \text{ rad/s}$	$T_o, \text{ s}$
314	3,332	0,3489	18,01
245	2,599	0,2722	23,08
176	1,867	0,1956	32,13
376,99	4,000	0,4189	15,00

3.2. Проверка на означението „4 об./min“

При $D=30\text{ mm}$ честота 4 min^{-1} съответства на $V=\pi Dn=376,99\text{ mm/min}$, а не на 314, 245 или 176 mm/min . Обратно, зададените три скорости съответстват на 3,332; 2,599 и $1,867\text{ min}^{-1}$. Поради тази несъвместимост настоящият анализ приема тройката 314/245/176 за периферни линейни скорости, както е използвана в количествените диаграми. Ако тя означава друга величина, кинематичните и енергийните показатели следва да се преизчислят.

$$V (n=4\text{ min}^{-1}) = \pi \cdot 30 \cdot 4 = 376,99\text{ mm/min} \quad (5)$$

3.3. Нормализирана дълбочина

За най-дълбокия режим 4/176 се получават $h/H=0,1016$ и $h_u/H=0,0848$. Следователно общата изменена зона е 10,16% от дебелината, а уякчената част е 8,48%. Отношението $h_u/h=0,8346$ характеризира вътрешното разпределение на изменената зона, без само по себе си да доказва фазов състав.

4. Енергийни показатели и безразмерен анализ

При P във ватове и V в mm/min сравнителната линейна енергия q_l се получава чрез преобразуване на минутите в секунди. Разделянето на q_l на номиналната ширина b задава площен сурогат q_a . Последният не е погълната енергия: той пренебрегва η , пространствения профил, наклона, осцилационната траектория и топлинните загуби.

$$q_l = 60P/V \text{ [J/mm]} \quad (6)$$

$$q_a = q_l/b = 60P/(Vb) \text{ [J/mm}^2\text{]} \quad (7)$$

Характерното време за преминаване на лъча през собствената му ширина и средната номинална плътност на мощността за правоъгълен сурогат са:

$$t(b) = 60b/V; I(n) = P/b^2 \quad (8)$$

Таблица 4. Енергийни, времеви и ефективностни показатели на ключови режими.

Режим	$q_l, \text{ J/mm}$	$q_a, \text{ J/mm}^2$	$t(b), \text{ s}$	$T_0, \text{ s}$	h_u/q_a
4/314	57,32	57,32	0,191	18,01	11,304
4/245	73,47	73,47	0,245	23,08	9,487
4/176	102,27	102,27	0,341	32,13	8,292
2/314	57,32	28,66	0,382	18,01	10,641

4.1. Безразмерни критерии

При налични топлофизични свойства процесът може да се организира чрез числата на Пекле и Фурие. Ако $a=k/(\rho c_p)$ е температуропроводността, характерната дължина е b , а скоростта се преобразува в mm/s , тогава:

$$Pe = Vb/(60a); Fo(b) = a \cdot t(b)/b^2 = 60a/(Vb); Pe \cdot Fo(b) = 1 \quad (9)$$

Тъждеството $Pe \cdot Fo(b) = 1$ е следствие от избраната времева скала $t(b)$ и не е независим физичен закон. За оценка на отношението между вложената мощност и проводимото отвеждане може да се въведе енергиен критерий:

$$\Pi(E) = \eta P / [kb\Delta T(c)] \quad (10)$$

Критериите Pe , $Fo(b)$ и $\Pi(E)$ не могат да бъдат изчислени надеждно без a , k , η и характерния температурен интервал $\Delta T(c)$. Те са полезни за бъдещо подобие и мащабиране, но не трябва да се запълват с произволни таблични константи за неизвестен материал.

$$\delta=h/H; \delta_u=h_u/H; \eta_u=h_u/q_a \quad (11)$$

$$E(\text{rev})=P \cdot T_o=60\pi DP/V \quad (12)$$

5. Топлинно поле, фазова кинетика и идентифицируемост

Физическият модел започва от нестационарното уравнение на топлопроводността в цилиндрични координати. При изотропна среда, температурно зависими свойства и обем източник Q то може да се запише като:

$$\rho(T)c_p(T)\partial T/\partial t=\nabla \cdot [k(T)\nabla T]+Q \quad (13)$$

$$\nabla^2 T=(1/r) \partial/\partial r(r\partial T/\partial r)+(1/r^2) \partial^2 T/\partial \theta^2+\partial^2 T/\partial z^2 \quad (14)$$

За повърхностно приложен гаусов лъч с ефективен радиус $r(b)$ и разстояние $s(t)$ до текущия център на петното граничното условие е:

$$-k\partial T/\partial n=[2\eta P/(\pi r^2(b))]\exp[-2s^2(t)/r^2(b)]-h(c)(T-T_\infty)-\varepsilon\sigma(SB)(T^4-T_\infty^4) \quad (15)$$

Температурният цикъл определя аустенитизацията, хомогенизацията на въглерода и мартензитното превръщане. Символичен интегрален критерий за термична активация и класически форми на кинетиката могат да бъдат представени чрез [13]:

$$\Theta(A)=\int [0, t(f)] \exp\{-Q(A)/[R(g)T(t)]\} dt \quad (16)$$

$$X(A, t)=1-\exp[-K(A, T)t^m(A)] \quad (17)$$

$$X(M, T)=1-\exp[-\alpha(M)(M(s)-T)], T<M(s) \quad (18)$$

Уравнения (16) -(18) представят съответно Arrhenius-тип натрупване, JMAK-тип преобразуване и Koistinen-Marburger-тип мартензитна фракция. Те са теоретична структура, а не калибрани прогнози за неизвестния материал.

Таблица 5. Структурна идентифицируемост на физичния модел.

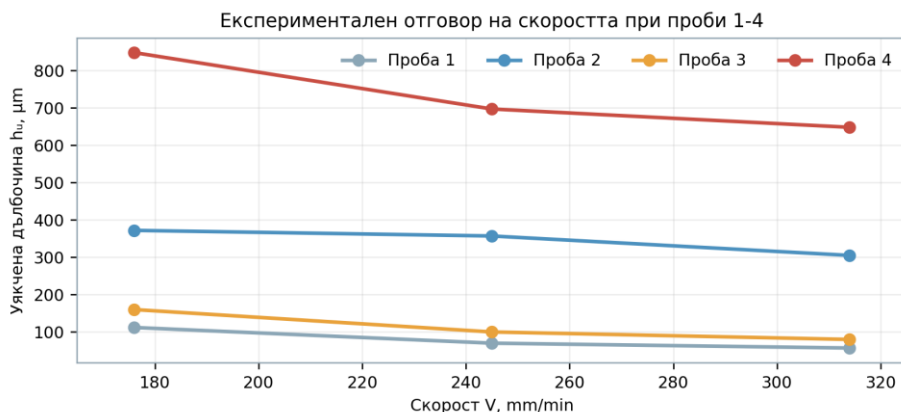
Компонент	Необходим параметър	Наличност	Следствие
Топлопроводност	$k(T)$, $\rho(T)$, $c_p(T)$	липсва	$T(x,t)$ не е еднозначно
Поглъщане	$\eta(T, \lambda, Ra)$	липсва	q_a е само сурогат
Гранични загуби	$h(c)$, ε , T_∞	липсват	неизвестно охлаждане
Фазови прагове	A_{c1} , A_{c3} , M_s	липсват	не може да се изчисли h_u
Материал	състав и начална структура	частично	ограничена преносимост
Лъч	профил, $r(b)$, действително петно	частично	b е номинална величина

При тази непълнота числено решение с произволно приети свойства би създавало привидна точност. Научно защитимата стратегия е двустепенна: първо се идентифицира локалната карта $(P, b, V) \rightarrow h_u$; след това, при нови термични измервания, тя се свързва с калибриран физичен модел.

6. Описателни факторни ефекти и взаимодействия

Балансът на плана позволява факторните контрасти да се оценят без смесване между P , b и V в разглеждания поднабор. Във всички дванадесет съпоставими точки

посоката е еднозначна: h_u се увеличава при $P=300$ W, при $b=1$ mm и при по-ниска V . Големината на ефекта обаче зависи от останалите фактори, което показва взаимодействия и вероятна близост до трансформационен праг.



Фиг. 3. Наблюдавана зависимост на h_u от скоростта за проби 1-4

Таблица 6. Съпоставени факторни отношения в измерения план.

Контраст	Минимум	Максимум	Геометрична средна	Интерпретация
$h_u(300 \text{ W})/h_u(200 \text{ W})$	3,321	8,100	5,471	силно нелинеен ефект на P
$h_u(b=1)/h_u(b=2)$	1,404	2,280	1,731	концентрация на потока
$h_u(176)/h_u(314)$	1,220	2,000	1,585	по-дълго въздействие



Фиг. 4. Описателно разлагане на вариацията на $\ln(h_u)$.

Ортогоналното разлагане при кодирани фактори приписва 84,63% от вариацията на $\ln(h_u)$ на P, 8,84% на b, 4,22% на V и 2,31% на двуфакторните взаимодействия. Тези проценти са описателни за конкретната факторна решетка; те не са универсални индекси на Соболев и не включват грешка от повторемостта.

7. Извеждане на локалния степенен модел

Положителността на h_u и мултипликативният характер на енергийните фактори мотивират степенна форма. Нормализирането към $P_0=200$ W, $b_0=2$ mm и $V_0=314$ mm/min прави аргументите безразмерни и намалява числената корелация между свободния член и наклоните:

$$h_u = K(P/P_0)^{\alpha} (b_0/b)^{\beta} (V_0/V)^{\gamma} \varepsilon(m) \quad (19)$$

При мултипликативна грешка $\varepsilon(m)$ логаритмуването превръща модела в линейна регресия. Нека $z_i = \ln(h_u, i)$, $x_{i1} = \ln(P_i/P_0)$, $x_{i2} = \ln(b_0/b_i)$, $x_{i3} = \ln(V_0/V_i)$. Тогава:

$$z = X\theta + e; \theta = [\ln K, \alpha, \beta, \gamma]^T \quad (20)$$

$$\theta = (X^T X)^{-1} X^T z \quad (21)$$

Оценяването с обикновени най-малки квадрати върху дванадесетте точки дава:

$$\hat{h}_u = 55,5407(P/200)^{4,1960} (2/b)^{0,7932} (314/V)^{0,7982} \quad (22)$$

Коефициентът $K = 55,5407 \mu m$ е изчислената дълбочина в референтната точка. Еластичността $\alpha = 4,1960$ означава, че локално 1% увеличение на P се свързва с приблизително 4,196% увеличение на h_u при фиксирани b и V . Аналогично 1% увеличение на b или V се свързва съответно с приблизително 0,793% и 0,798% намаление на h_u . Тези производни са валидни само локално и не описват поведение отвъд 200-300 W.

$$\partial \ln \hat{h}_u / \partial \ln P = \alpha; \partial \ln \hat{h}_u / \partial \ln b = -\beta; \partial \ln \hat{h}_u / \partial \ln V = -\gamma \quad (23)$$

7.1. Проверка в ключовата точка

За $P = 300$ W, $b = 1$ mm и $V = 176$ mm/min моделът дава $\hat{h}_u = 837,45 \mu m$ спрямо измерени $848 \mu m$; относителното отклонение е -1,24%. В режим 4/314 моделът дава $527,57 \mu m$ спрямо $648 \mu m$, което показва локално взаимодействие, което главно-ефектният модел изглажда. Следователно високото общо R^2 не отменя диагностиката по отделни точки.

7.2. Алтернативна енергийна параметризация

Тъй като $q_a \propto P/(Vb)$, замяната на трите фактора само с q_a би наложила еднакви по абсолютна стойност еластичности. Наблюдаваното $\alpha \gg \beta \approx \gamma$ отхвърля тази рестрикция: мощността влияе не само чрез общата енергия, а вероятно и чрез достигането на критична температура и изменението на поглъщането.

$$h_u = C q_a^m \Rightarrow (\alpha, \beta, \gamma) = (m, m, m), \text{ което не се подкрепя от оценките } \quad (24)$$

Интерпретационна граница. Голямата α не е материална константа. Тя е ефективен наклон между две нива на мощност и може да включва прагова фазова нелинейност.

8. Неопределеност на параметрите и остатъчна диагностика

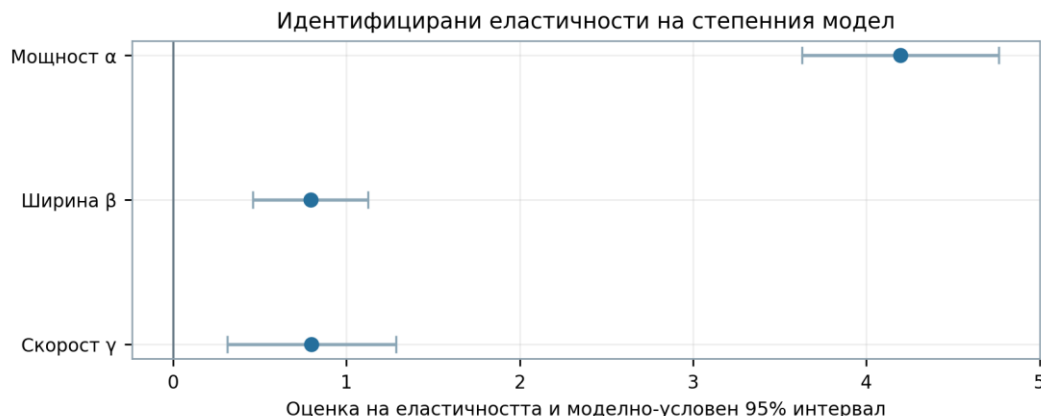
При работните допускания $E(e|X) = 0$ и $\text{Var}(e|X) = s^2 I$ ковариационната матрица на оценките е $s^2 (X^T X)^{-1}$. Остатъчната стандартна грешка в логаритмична скала е $s = 0,1731$ при осем остатъчни степени на свобода.

$$\text{Cov}(\theta) = s^2 (X^T X)^{-1}; s^2 = \text{SSE}/(n-p) \quad (25)$$

Таблица 7. Моделно-условни оценки и 95% t-интервали.

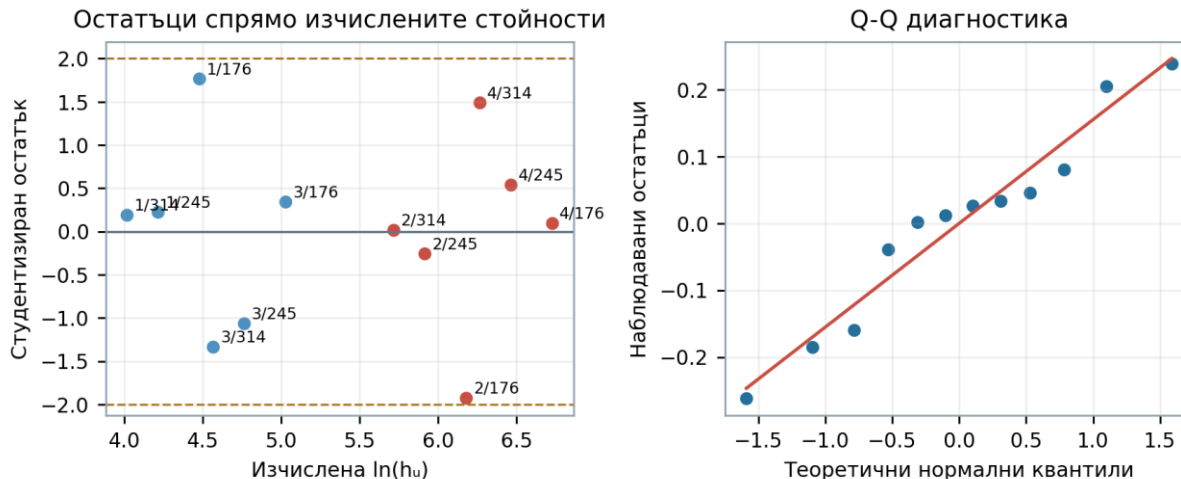
Параметър	Оценка	SE	95% интервал	Смисъл
$\ln K$	4,0171	0,1043	[3,7767; 4,2575]	референтен свободен член
α	4,1960	0,2465	[3,6276; 4,7645]	еластичност към P
β	0,7932	0,1442	[0,4607; 1,1258]	еластичност към b

Параметър	Оценка	SE	95% интервал	Смисъл
γ	0,7982	0,2108	[0,3122; 1,2842]	еластичност към V



Фиг. 5. Еластичности и моделно-условни 95% интервали

Всички три еластичности имат положителни интервали в използваната знакова конвенция на уравнение (22), което подкрепя монотонната посока в изследвания прозорец. Интервалите обаче са условни спрямо избрания модел и третират остатъка като случайна грешка; без повторения те не са чиста оценка на физическата възпроизводимост.



Фиг. 6. Остатъчни и Q-Q диагностични графики.

$$r_i = e_i / [\sqrt{s(1-h_{ii})}] \quad (26)$$

Максималният $|r_i|$ е 1,929; няма точка над условната граница $|r_i|=2$. Максималният leverage е 0,386. Shapiro-Wilk тестът дава $W=0,950$ и $p=0,637$, но при $n=12$ тестът има ниска мощност. Диагностиката не открива грубо нарушение, без да доказва нормалност или хомоскедастичност.

9. Избор на модел и прогнозна валидация

При малка извадка минимизирането на остатъчната сума не е достатъчно, защото всеки допълнителен член подобрява интерполацията. Използван е коригираният

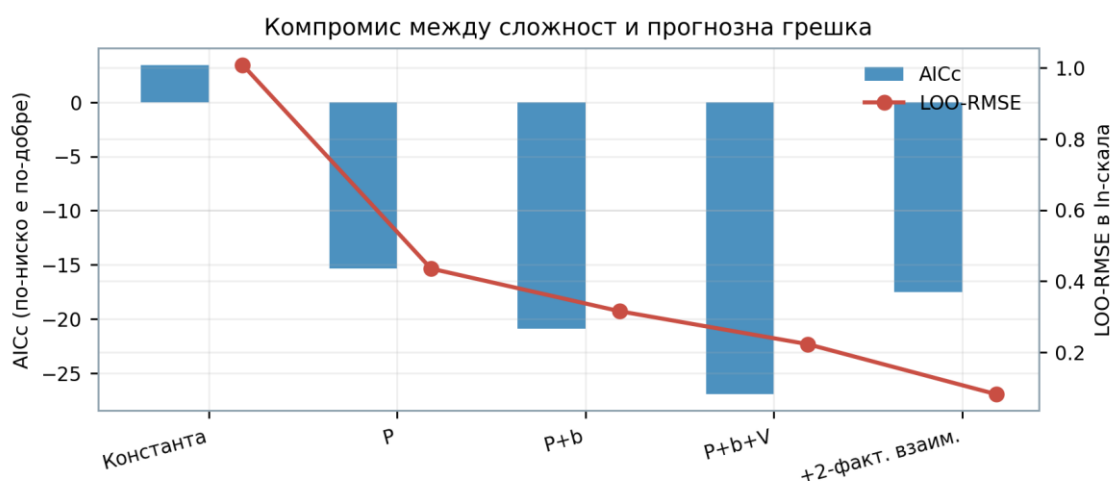
критерий на Akaike, който наказва броя на параметрите k спрямо n , и leave-one-out (LOO) проверка, при която всяко наблюдение последователно се прогнозира от модел, оценен без него [7,8].

$$AICc = n \ln(RSS/n) + 2k + [2k(k+1)]/(n-k-1) \quad (27)$$

$$e_{(i)} = e_i / (1 - h_{ii}); \text{PRESS} = \sum e_{(i)}^2; \text{RMSE_LOO} = \sqrt{(\text{PRESS}/n)} \quad (28)$$

Таблица 8. Информационна и прогнозна съпоставка на вложени модели.

Модел	k	RSS	AICc	LOO-RMSE	Оценка
Константа	1	10,2604	3,45	1,009	неадекватен
P	2	1,5766	-15,36	0,435	недостатъчен
P+b	3	0,6697	-20,92	0,315	подобен
P+b+V	4	0,2398	-26,96	0,222	предпочетен
+ двуфакторни взаимодействия	7	0,0135	-17,50	0,081	риск от свръхнастройване



Фиг. 7. Съпоставка на AICc и LOO-грешката

Моделът P+b+V минимизира AICc и съхранява физично четими главни ефекти. Моделът с взаимодействия има по-ниска LOO-RMSE върху тази решетка, но AICc го наказва силно за седем параметъра при дванадесет наблюдения. Поради липса на външна валидация предпочитаният модел е по-пестеливият главно-ефектен вариант.

$$R^2(\log) = 1 - \text{RSS}/\text{TSS} = 0.97663 \quad (29)$$

PRESS=0,59148 и RMSE_LOO=0,22201 в ln-скала. Тази грешка се интерпретира приблизително като мултипликативен фактор $\exp(0,222) = 1,249$, а не като постоянна грешка в μm . Отделен прогнозен интервал за ново наблюдение е по-широк от интервала за средната функция и остава моделно условен.

10. Локална чувствителност и разпространение на неопределеността

За малки относителни изменения степенният модел има особено ясна диференциална форма. Векторът на логаритмичните чувствителности е $g = [\alpha, -\beta, -\gamma]^T$.

Той описва първоредната промяна на отговора и позволява входните толеранси да се преведат към неопределеност на h_u .

$$d\ln \hat{h}_u = \alpha \cdot d\ln P - \beta \cdot d\ln b - \gamma \cdot d\ln V \quad (30)$$



Фиг. 8. Абсолютни локални еластичности на модела

При ковариационна матрица $\Sigma(\ln)$ на логаритмите на входовете първоредната неопределеност се получава чрез закона за разпространение:

$$\text{Var}[\ln(\hat{h}_u)] \approx g^T \Sigma(\ln) g \quad (31)$$

Ако относителните грешки са малки, независими и с коефициенти на вариация $CV(P)$, $CV(b)$ и $CV(V)$, тогава:

$$CV^2(\hat{h}_u) \approx \alpha^2 CV^2(P) + \beta^2 CV^2(b) + \gamma^2 CV^2(V) \quad (32)$$

Таблица 9. Първоредно разпространение при независими и еднакви относителни допуски.

Еднакъв входен CV	$CV(h_u)$	Дял от P	Дял от b	Дял от V
1%	4,34%	93,30%	3,33%	3,37%
2%	8,69%	93,30%	3,33%	3,37%
5%	21,72%	93,30%	3,33%	3,37%

Резултатът не означава, че реалната мощност е най-нестабилният вход; той означава, че еднаква относителна нестабилност в P причинява най-голямо изменение на h_u . При корелация между входовете трябва да се запазят извъндиагоналните членове $2g_i g_j \text{Cov}(\ln x_i, \ln x_j)$.

10.1. Втори ред и нелинейност

За относителни приращения $u = (\Delta P/P, \Delta b/b, \Delta V/V)$ вторият ред на $\hat{h}_u/\hat{h}_{u,0}$ се определя от относителния Хесиан:

$$H(\text{rel}) = [[\alpha(\alpha-1), -\alpha\beta, -\alpha\gamma], [-\alpha\beta, \beta(\beta+1), \beta\gamma], [-\alpha\gamma, \beta\gamma, \gamma(\gamma+1)]] \quad (33)$$

$$\hat{h}_u/\hat{h}_{u,0} \approx 1 + g^T u + (1/2) u^T H(\text{rel}) u \quad (34)$$

Числено $H(\text{rel}) [1,1] = 13,411$, което потвърждава, че симетрични отклонения на мощността пораждат асиметричен отговор. При големи допуски трябва да се използва точната степенна форма, а не линейното приближение.

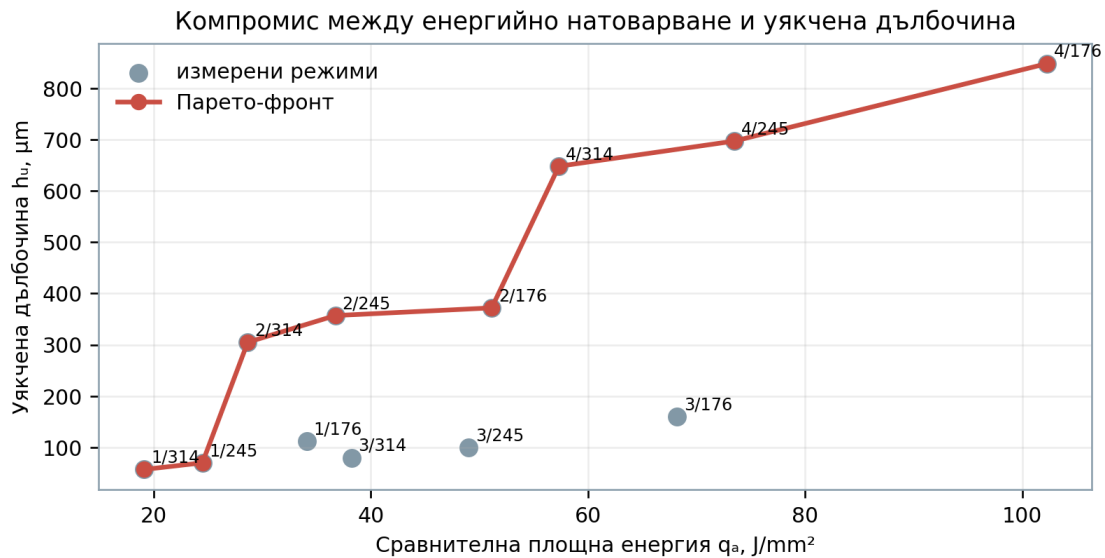
11. Многокритериална оптимизация и Парето-фронт

Нека първата цел максимизира h_u , а втората минимизира сравнителната площна енергия q_a . Режим x_j доминира x_i , ако не е по-лош и по двата критерия и е строго по-

добър поне по единия. Множеството на недоминираните точки формира дискретния Парето-фронт.

$$x_j < x_i \Leftrightarrow q_{a,j} \leq q_{a,i} \wedge h_{u,j} \geq h_{u,i}, \text{ с поне едно строго неравенство (35)}$$

$$P_F = \{x_i \in X: \text{не съществува } x_j \in X, \text{ за което } x_j < x_i\} \quad (36)$$



Фиг. 9. Експериментален Парето-фронт за q_a и h_u

Таблица 10. Недоминирани експериментални решения

Режим	$q_a, \text{J/mm}^2$	$h_u, \mu\text{m}$	$V, \text{mm/min}$	h_u/q_a
1/314	19,11	57	314	2,983
1/245	24,49	70	245	2,858
2/314	28,66	305	314	10,641
2/245	36,73	357	245	9,718
2/176	51,14	372	176	7,275
4/314	57,32	648	314	11,304
4/245	73,47	697	245	9,487
4/176	102,27	848	176	8,292

Проба 4/176 е крайна Парето-точка с максимална h_u , а 4/314 има най-високо отношение h_u/q_a сред всички дванадесет режима. Отношението е полезно описателно, но не трябва да замества Парето-подхода: то въвежда конкретна линейна компенсация между физически различни величини и може да промени ранга при смяна на единиците.

$$\eta_u = h_u/q_a \quad (37)$$

Парето-интерпретация. Няма единствен универсален оптимум без допълнително предпочитание. 4/176 максимизира резултата; 4/314 е силният енергийно-производителен компромис.

12. Прагово и вероятностно ограничено решение

Инженерно прозрачният избор минимизира q_a сред режимите, които покриват предварително зададена минимална дълбочина H_0 . Тази постановка избягва субективни тегла и превръща технологичното изискване в проверимо ограничение.

$$x^*(H_0) = \arg \min q_a(x), \text{ при } x \in X \text{ и } h_u(x) \geq H_0 \quad (38)$$

Таблица 11. Точно прагово правило върху измерения дискретен набор.

Интервал на H_0 , μm	Избран режим	q_a , J/mm^2	Резерв $h_u - H_0$
$H_0 \leq 57$	1/314	19,11	≥ 0
$57 < H_0 \leq 70$	1/245	24,49	0-13
$70 < H_0 \leq 305$	2/314	28,66	0-235
$305 < H_0 \leq 357$	2/245	36,73	0-52
$357 < H_0 \leq 372$	2/176	51,14	0-15
$372 < H_0 \leq 648$	4/314	57,32	0-276
$648 < H_0 \leq 697$	4/245	73,47	0-49
$697 < H_0 \leq 848$	4/176	102,27	0-151

Когато средният отговор не е достатъчен и се изисква надеждност r , ограничението се формулира вероятно. При условен нормален модел $Y(x) \sim N(\mu(x), \sigma^2(x))$:

$$P[Y(x) \geq H_0] \geq r \Leftrightarrow \mu(x) - z(r)\sigma(x) \geq H_0 \quad (39)$$

Лявата страна $LCB(r) = \mu - z(r)\sigma$ е едностранна долна граница. Например при $H_0 = 600 \mu\text{m}$ и условно $\sigma = 50 \mu\text{m}$ вероятността е 83,1% за 4/314, 97,4% за 4/245 и над 99,999% за 4/176. Следователно изискване $r = 0,95$ би преместило избора от 4/314 към 4/245, въпреки че детерминистичният праг избира по-бързия режим.

$$R_x(H_0) = \Phi[(\mu_x - H_0)/\sigma_x] \quad (40)$$

12.1. Сравнение на ключовите решения

Спрямо 4/176 режим 4/314 запазва 76,42% от максималната h_u , намалява q_a с 43,95% и увеличава V със 78,41%; времето за оборот намалява от 32,13 на 18,01 s. Режим 4/245 е междинно решение: 82,19% от максималната h_u при 28,16% по-ниско q_a спрямо 4/176.

13. Формална вероятностна постановка

Вероятностният модел се задава като тройка $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пространството на елементарните събития Ω съдържа всички възможни изходи на експеримента; σ -алгебрата $\mathcal{F}$ съдържа измеримите събития; вероятностната мярка $P: \mathcal{F} \rightarrow [0,1]$ удовлетворява аксиомите $P(\Omega) = 1$, $P(A) \geq 0$ и изброима адитивност за взаимно изключващи се събития.

$$(\Omega, \mathcal{F}, P); P(\Omega) = 1; P(A) \geq 0 \quad (41)$$

$$P(\cup_i A_i) = \sum_i P(A_i), \text{ ако } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ за } i \neq j \quad (42)$$

За настоящия процес елементарен изход може да бъде векторът $\omega = (h, h_u, B, z, Ra, \text{дефект})$ от едно независимо повторение при фиксиран режим. Събитието $A = \{\omega: h_u \geq H_0\}$ означава изпълнение на технологичния праг, а $P(A)$ е производствената надеждност при ясно определени условия.

Таблица 12. Видове вероятностни модели и приложимост.

Модел	Математическа форма	Приложение към процеса	Статус
Класически	$P(A)=m/N$	равновероятни дискретни изходи	неподходящ за h_u
Геометричен	$P(A)=\mu(A)/\mu(\Omega)$	случайна точка в зона/обем	възможен за пространствен дефект
Дискретен	$P(X=x_j)=p_j$	брой дефекти или клас на структурата	изисква честоти
Непрекъснат	$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$	h_u , твърдост, температура	подходящ след повторения
Стохастичен процес	$\{X_t, t \geq 0\}$	еволюция на температура/състояние	изисква времеви данни
Марковски	$P(X_{t+1} X_{0:t})=P(X_{t+1} X_t)$	преходи между структурни състояния	неидентифицируем сега

Класически модел: $P(A)=|A|/|\Omega|$ (43)

Геометричен модел: $P(A)=\mu(A)/\mu(\Omega)$ (44)

Дискретен модел: $\sum_j p_j = 1$; непрекъснат модел: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ (45)

Марковско свойство: $P(X_{t+1}=j|X_t=i, X_0) = p_{ij}$ (46)

Класическият модел е приложим само при краен брой равновероятни изходи, каквито са резултатите от идеализирана монета или зар; непрекъснатата дълбочина h_u не удовлетворява това условие. За h_u естественият избор е непрекъснат модел, но неговата плътност и дисперсия трябва да бъдат оценени от повторения, а не предположени.

14. Условна вероятност на ранга и робастност

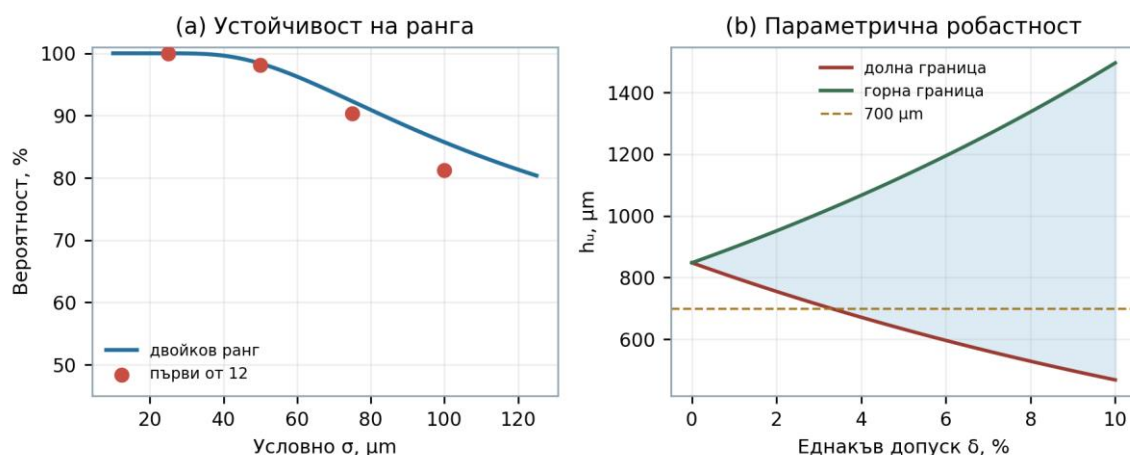
Нека $Y_i = \mu_i + \varepsilon_i$, където ε_i са независими $N(0, \sigma^2)$. За два режима разликата $Y_1 - Y_2$ е нормална със средна $\mu_1 - \mu_2$ и дисперсия $2\sigma^2$. Така устойчивостта на преднината 151 μm на 4/176 спрямо 4/245 е:

$$P(Y_1 > Y_2) = \Phi[(\mu_1 - \mu_2)/(\sqrt{2}\sigma)] \quad (47)$$

Таблица 13. Сценарна чувствителност на ранга към σ

$\sigma, \mu m$	$P(4/176 > 4/245)$	$P(4/176 \text{ е първи от } 12)$
25	99,999%	$\approx 100,0\%$
50	98,364%	98,1%
75	92,272%	90,3%
100	85,718%	81,2%

Втората вероятност е оценена чрез 100 000 Монте Карло реализации на всичките дванадесет режима при фиксирано начално число. Тя е по-ниска от двойковата вероятност, защото 4/176 трябва едновременно да превъзхожда всички конкуренти. Допусканията за независимост, нормалност и еднаква σ са сценарни.



Фиг. 10. Условна устойчивост на ранга и моделно робастен диапазон около 4/176

$$R(\min)=[1-\delta(P)]^{\alpha}[1+\delta(b)]^{(-\beta)}[1+\delta(V)]^{(-\gamma)} \quad (48)$$

$$R(\max)=[1+\delta(P)]^{\alpha}[1-\delta(b)]^{(-\beta)}[1-\delta(V)]^{(-\gamma)} \quad (49)$$

При еднакъв допуск $\pm 5\%$ долната локална оценка около измерените $848 \mu\text{m}$ е $632,7 \mu\text{m}$. При $\pm 3\%$ тя е $712,0 \mu\text{m}$, при $\pm 2\%$ - $754,9 \mu\text{m}$, а при $\pm 1\%$ - $800,2 \mu\text{m}$. Това е worst-case оценка на модела, а не статистически доверителен интервал.

$$\varepsilon(\text{sym}) < (848-697)/2 = 75,5 \mu\text{m} \quad (50)$$

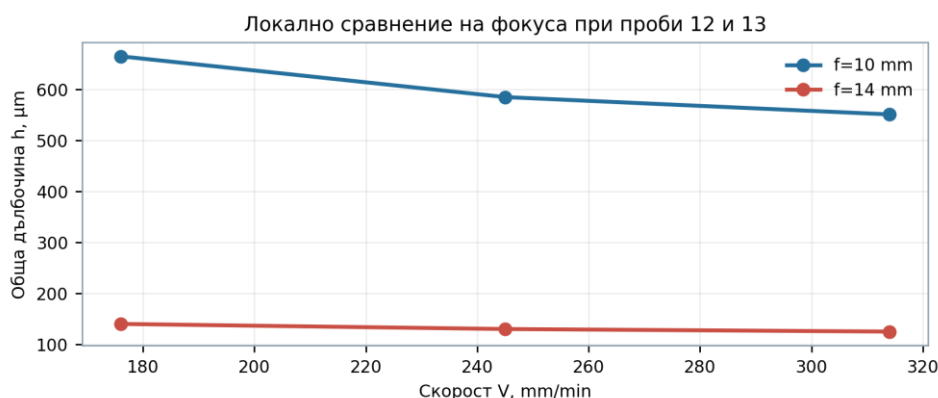
Уравнение (50) дава детерминистична граница: ако всяко от двете измервания може да се измени неблагоприятно с не повече от $\varepsilon(\text{sym})$, рангът между 4/176 и 4/245 се запазва. Тя не изисква разпределение, но разглежда само тази двойка.

$$P_{\text{rank}}(\sigma) = P[\arg\max_i(Y_i) = 4/176] \quad (51)$$

15. Фокус, застъпване и осцилация: вторични зависимости

15.1. Фокусно разстояние

Проби 12 и 13 образуват отделен съпоставим контраст при $P=300 \text{ W}$, $b=2 \text{ mm}$, $v_{\text{osc}}=300 \text{ mm/s}$ и подобро начално състояние. При $f=10 \text{ mm}$ общата дълбочина h е 551, 585 и $665 \mu\text{m}$, а при $f=14 \text{ mm}$ - 125, 130 и $140 \mu\text{m}$ за $V=314, 245$ и 176 mm/min . Така h_{10}/h_{14} е 4,408-4,750, докато ширината на зоната нараства само с 2,1-7,1%.



Фиг. 11. Локален ефект на $f=10$ и 14 mm върху общата дълбочина h

Този контраст доказва локално превъзходство на 10 mm спрямо 14 mm по h , но не установява глобален оптимум спрямо 4, 5 или 6 mm и не позволява ранжиране по h_n . За гаусов лъч идеализираното разширение на радиуса около талията е:

$$w(z)=w_0\sqrt{1+((z-z_0)/z(R))^2}; I_0(z)=2P/[\pi w^2(z)] \quad (52)$$

В таблицата f е технологична настройка, но не е доказано, че съвпада с координатата $z-z_0$ или че $b=2w$. Поради това уравнение (52) дава теория за бъдеща оптична калибрация, а не числена реконструкция на петното.

15.2. Застъпване

Ако s е стъпката между съседни следи, номиналното застъпване O и броят преминавания върху единица ширина могат да се параметризират чрез:

$$O=1-s/b; N_{\text{pass}} \approx b/s=1/(1-O) \quad (53)$$

$$q_{a, \text{eff}} \approx q_a/(1-O), \text{ само при линейно сумиране без междинно охлаждане} \quad (54)$$

Реалното топлинно натрупване зависи от фазата между оборотите, времето за охлаждане и температурната зависимост на поглъщането. Следователно формула (54) е горна организационна хипотеза, а не валидиран модел. За количествен анализ са необходими s , брой преминавания и h_c по напречното сечение.

15.3. Осцилация

При напречна осцилация $y(t)$ моментната скорост на петното върху повърхността е резултат от периферната и осцилационната компонента:

$$v_{\text{path}}(t)=\sqrt{[(V/60)^2+(dy/dt)^2]} \quad (55)$$

Самата стойност 300, 350 или 400 mm/s не определя дозата без амплитуда, честота и закон на движение. Поради липсващи количествени отговори режимите с 350 и 400 mm/s се третират като направления за нов факторен експеримент, а не като доказани подобрения.

16. Разширени статистически и стохастични модели

Настоящият степенен модел е подходящ за малък балансиран набор и ясна инженерна интерпретация. По-сложни модели стават обосновани само ако новите данни съдържат повторения, междинни нива и времеви наблюдения. Методът следва да се избира според информационната структура, а не според математическата му сложност.

16.1. Байесова йерархия

При повторения y_{ij} за режим i може да се въведе йерархия, която отделя средната функция от режимно специфичната дисперсия. Постериорното разпределение е:

$$p(\theta, \sigma|y) \propto p(y|\theta, \sigma) p(\theta)p(\sigma) \quad (56)$$

Слабо информативни априорни разпределения за α , β и γ могат да ограничат нереалистични екстраполации, а постериорното $P[x=\arg\max h_u|y]$ директно да изрази неопределеността на ранга. При текущите дванадесет единични наблюдения изборът на априор би имал прекомерно влияние и затова не се използва за окончателна препоръка.

16.2. Гаусов процес и прагова класификация

$$f(x) \sim GP[m(x), k(x, x')]; y=f(x)+\varepsilon \quad (57)$$

Гаусов процес би моделирал гладка нелинейна повърхност и прогнозна неопределеност, но изисква повече междинни точки. Ако отговорът е клас „недоуякчено/приемливо/прегрято“, може да се използва логистичен модел $P(A|x)=\text{logit}^{-1}[g(x)]$. И двата подхода трябва да се валидират извън точките на обучение.

16.3. Марковски и state-space модели

За последователни структурни състояния $S = \{\text{недогрято, аустенитизирано, уячено, отвърнато, дефектно}\}$ преходната матрица $M=[p_{ij}]$ трябва да бъде оценена от наблюдавани преходи:

$$p_{ij}=P(X_{t+1}=j|X_t=i); \sum_j p_{ij}=1 \quad (58)$$

$$\pi_{t+k}=\pi_t M^k \quad (59)$$

Наличните данни съдържат само крайни статични резултати; няма честоти на преходите и времеви траектории. Следователно конкретна M би била измислена. При термография по време на обработката по-подходящ е state-space модел с латентна температура/структура:

$$x_{t+1}=F(x, u) + w; y_t=G(x_t)+v \quad (60)$$

Таблица 14. Моделна пътна карта според бъдещите данни.

Модел	Минимални нови данни	Основна полза	Риск
Степенен	междинни факторни точки	еластичности и проста оптимизация	локална валидност
Байесов	повторения и обосновани априори	пълна постериорна неопределеност	чувствителност към априора
Гаусов процес	по-гъста решетка	нелинейна повърхност и active learning	слаба екстраполация
Марковски	наблюдавани преходи	риск от последователни състояния	неидентифицируем сега
State-space	термография във времето	онлайн оценка и управление	сложна калибрация

Критерий за усложняване. Нов модел е оправдан само ако подобрява външната прогноза или управлението и ако параметрите му са идентифицируеми от реално измерени данни.

17. Експериментална валидация и метрологична проследимост

Най-важната следваща стъпка е повторяем експеримент, който отделя чистата грешка от липсата на съответствие. За сравнение на две независими средни при очаквана разлика Δ , стандартно отклонение σ , двустранно ниво α_0 и мощност $1-\beta_0$ приблизителният размер на група n е:

$$n \geq 2\sigma^2 [z(1-\alpha_0/2) + z(1-\beta_0)]^2 / \Delta^2 \quad (61)$$

При $\Delta=151 \mu\text{m}$, $\sigma=75 \mu\text{m}$, $\alpha_0=0,05$ и мощност $0,80$ се получава $n \approx 3,87$, т.е. минимум четири повторения на режим. Препоръчват се пет, за да се оцени дисперсията, да се откриват аномалии и да се провери хетероскедастичност. Оценката е сценарна и трябва да се актуализира след пилотна серия.

17.1. Измервателен модел

Според GUM неопределеността се свързва с изрично измервателно уравнение [9]. Ако h_u се определя от пикселна дължина $l(px)$, калибрационен коефициент $c(cal)$ и корекции δ_j , тогава:

$$h_u = c(cal) \cdot l(px) + \sum_j \delta_j \quad (62)$$

$$u^2(c, h_u) = \sum_i (\partial h_u / \partial x_i)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i < j} (\partial h_u / \partial x_i) (\partial h_u / \partial x_j) u(x_i, x_j) \quad (63)$$

$$U = k \cdot u(c), \text{ обикновено } k \approx 2 \text{ при подходящи условия} \quad (64)$$

Таблица 15. Минимален последващ план за валидация.

Етап	Режими / нива	Повторения	Задължителни измервания
Потвърждение на ранга	4/176, 4/245	5+5	h_u , h , B_z , профил микротвърдост
Прагов компромис	4/314, 4/245, 4/176	5 всеки	действителна P , V , температура, време
Фокус	$f=4,6,10,14$ mm	3-5	еднакво състояние, петно и h_u
Осцилация	300,350,400 mm/s	3-5	амплитуда, честота, траектория
Застъпване	$O=0,25,50\%$	3-5	равномерност, отвърщане, остатъчни напрежения

Редът на изпълнение трябва да бъде рандомизиран; позицията на металографския срез и критерия за границата на h_u - предварително фиксирани; операторът по възможност - сляп за режима. Необходимо е да се регистрират действителната мощност върху детайла, геометрията на петното, скоростта, температурата и атмосферните условия. Факторният дизайн и повторенията са съществени за процесно моделиране [5,10].

18. Дискусия, преносимост и инженерна интерпретация

Най-силният резултат е непосредствено експериментален: 848 μm е най-голямата наблюдавана h_u и превишава следващата стойност със 151 μm . Този извод не зависи от регресионната форма. Степенният модел добавя обяснителна структура: доминиращ положителен ефект на P и отрицателни ефекти на b и V , които са съвместими с по-висока локална интензивност и по-дълго термично въздействие. Съгласието с физичната посока повишава правдоподобността, но не превръща емпиричните еластичности във фундаментални константи.

Голямата $\alpha \approx 4,20$ вероятно агрегира няколко механизма: достигане на праг за аустенитизация, температурно зависимо поглъщане и взаимодействие между мощност и ширина. Само две нива на P не позволяват да се различат плавна степенна крива, прагова зависимост и насищане. Поради това най-ценните нови точки са междинни мощности между 200 и 300 W, повторени при $b=1$ mm и трите скорости, последвани от безопасно локално разширяване на прозореца.

18.1. Йерархия на доказателството

Таблица 16. Йерархия на доказателството и граници на обобщението.

Твърдение	Ниво	Основание	Необходимо за повишаване на нивото
4/176 максимизира измерената h_u	високо локално	директен дискретен максимум	повторения и независима серия
4/314 е производствен компромис	високо локално	Парето и прагово правило	реална погълната енергия и време
P е доминиращ фактор	средно-високо	балансиран контраст и регресия	междинни нива и повторения
$f=10$ mm е по-добро от 14 mm по h	средно	съпоставена двойка 12-13	h_u и общо начално състояние
застъпването/осцилацията са оптимални	недоказано	липсва пълен отговор	факторен експеримент
моделът важи при 2000 W	недопустимо	екстраполация 6,7 пъти над 300 W	постепенно безопасно разширяване

18.2. Инженерно решение

За лабораторно максимизиране на h_u се използва 4/176: 300 W, $b=1$ mm, $f=4$ mm, $v_{osc}=300$ mm/s, отгрято състояние и без застъпване. За серийна производителност при изискване до 648 μm се предпочита 4/314. При праг 650-697 μm се използва 4/245. Ако се изисква подобро начално състояние, локалната препоръка е проба 12 при $f=10$ mm и $V=176$ mm/min само по $h=665$ μm ; тя не може да бъде сравнявана по h_u .

Преносимостта към друг материал, диаметър или оптична система изисква ново калибриране. Безразмерните критерии на раздел 4 предоставят концептуален мост, но се нуждаят от топлофизични свойства и измерена поглъщателна способност. Глобалната чувствителност [11] и Монте Карло анализът [12] стават смислени едва след вероятностна калибрация на входовете.

19. Заключение

Разработеният модел обединява геометрия, кинематика, топлопренос, фазова теория, регресионна идентификация, информационен избор, вероятност и робастна оптимизация. От петнадесетте зададени проби научно съпоставимата основа е факторният поднабор от дванадесет режима на проби 1-4; проби 12-13 формират отделен локален анализ на фокуса.

Главно-ефектният степенен модел има $R^2_{log}=0,9766$, $AICc=-26,96$ и $LOO-RMSE=0,222$. Максималната измерена $h_u=848$ μm е при режим 4/176. Режимът е еднозначен дискретен максимум и Парето-ефективно решение, но не максимизира h_u/q_a . При праг $N_o \leq 648$ μm режим 4/314 е по-рационалният компромис; при $648 < N_o \leq 697$ μm се избира 4/245.

Вероятностните резултати са сценарни. При $\sigma=50$ μm шансът 4/176 да остане първи сред дванадесетте режима е около 98,1%, а при $\sigma=75$ μm - около 90,3%. Тези стойности не заменят повторенията. Препоръчват се минимум пет повторения на ключов режим, метрологичен бюджет за h_u и регистрация на действителната мощност, петното и температурния цикъл.

20. Сравнителен анализ с резултати на други автори

Получените зависимости са в общо съгласие с установената физика на лазерното трансформационно уякчаване. Steen и Mazumder [1] и Ion [2] разглеждат дълбочината и геометрията на термично изменената зона като резултат от съвместното действие на плътността на мощността, времето на взаимодействие, поглъщането и топлоотвеждането. В настоящото изследване същата посока се наблюдава експериментално: увеличаването на P от 200 на 300 W нараства h_u във всички съпоставими комбинации, намаляването на V от 314 на 176 mm/min увеличава времето на термично въздействие, а $b=1$ mm концентрира енергията по-силно от $b=2$ mm.

Таблица 17. Съпоставка с подходи и резултати от литературата.

Източник	Обект и подход	Основен резултат	Съпоставка с настоящото изследване
Ashby и Easterling [3]	Подевтектоидни стомани; термично-фазов модел	Дълбочината се определя от температурния цикъл и времето над критичните температури.	Положителният ефект на P и отрицателният ефект на V съвпадат с тази постановка.

Patwa и Shin [4]	AISI 5150H; 3D преходен термичен и кинетичен модел	Работните параметри и началната структура позволяват прогнозиране на температурата и уякчената дълбочина.	Степенният модел тук дава силно локално съответствие, но без пряко температурно поле.
Настоящо изследване	Цилиндър D=30 mm, H=10 mm; 12 режима	$h_{u,max}=848 \mu\text{m}$ при 300 W, b=1 mm и V=176 mm/min; $R^2_{log}=0,9766$.	Добавени са AICс, LOO- проверка, Парето анализ и сценарна оценка на робастността.

Количествено най-силно е влиянието на мощността. Геометричната средна на отношението h_u (300 W)/ h_u (200 W) е 5,471, докато средните контрасти за стесняване на лъча и намаляване на скоростта са съответно 1,731 и 1,585. Това съответства на оценените еластичности $\alpha=4,1960$, $\beta=0,7932$ и $\gamma=0,7982$. Посоката е съвместима с [1-4], но големината на α не следва да се приема за универсална материална константа: тя е идентифицирана само между две нива на мощност и вероятно включва праг на аустенитизация, промяна на поглъщането и взаимодействие между P и b.

Максималната измерена дълбочина 0,848 mm е от същия инженерен порядък като лазерно уякчени слоеве, разглеждани в специализираната литература, но директно сравнение на абсолютните стойности не е коректно. Patwa и Shin [4] работят с AISI 5150H и различна начална микроструктура, оптика и топлофизични свойства, докато тук материалните константи, действителното поглъщане и температурният цикъл не са измерени. Следователно надеждното сравнение е по тенденции и безразмерни съотношения, а не само по дълбочина.

Спрямо посочените автори приносът на настоящата работа е преди всичко методологичен: експерименталният максимум се отделя от моделната интерпретация и от условната вероятност, а изборът на режим се разглежда като компромис между h_u , q_a и V. Ограниченията остават липсата на повторения, профили на микротвърдост, фазова идентификация и измерена погълната мощност. Поради това съгласието с [1-4] потвърждава физичната правдоподобност на тенденциите, но не доказва преносимост извън диапазона P=200-300 W, b=1-2 mm и V=176-314 mm/min.

Номенклатура на означенията

Символ	Описание	Единица	Символ	Описание	Единица
A_o	площ на челната повърхнина	mm ²	A(lat)	странична повърхнина	mm ²
A(tot)	обща повърхнина	mm ²	a	температуропроводност	mm ² /s
b	ширина на лъча/следата	mm	B(i)	ширина на зона i	mm
C	обиколка на пробата	mm	c_p	специфичен топлинен капацитет	J/(kg·K)
D, R, H	диаметър, радиус, дебелина	mm	E(rev)	енергия за един оборот	J
f	фокусно разстояние	mm	Fo	число на Фурие	-
h, h_u	обща и уякчена дълбочина	μm	h(c)	коэф. на конвекция	W/(m ² ·K)
I(n), I_o	номинална/осева плътност на мощността	W/mm ²	k	топлопроводност	W/(m·K)
n, ω	честота и ъглова скорост	min ⁻¹ ; rad/s	O	коэффициент на застъпване	-
P	лазерна мощност	W	Pe	число на Пекле	-
q_i, q_a	линейна и площна сравнителна енергия	J/mm; J/mm ²	Q	обемен топлинен източник	W/m ³
r, θ, z, s	локални цилиндрични координати	mm; rad	T, T_∞	температура и околна температура	K

T_{os}, t(b)	време за оборот/взаимодействие	s	V	периферна линейна скорост	mm/min
v_{os}c, v(path)	скорост на осцилация/траектория	mm/s	V(cyl)	обем на цилиндъра	mm ³
w, w_o, zR	радиус на лъча, талия, дължина на Релей	mm	α, β, γ	степенни еластичности	-
δ, δ_u	нормализирани дълбочини	-	η	ефективна поглъщателна способност	-
η_u	условна ефективност h_u/q_a	$\mu\text{m} \cdot \text{mm}^2/\text{J}$	$\varepsilon, \sigma(\text{SB})$	емисивност; константа на Стефан-Болцман	$\frac{W}{(\text{m}^2 \cdot \text{K}^4)}$
П(Е)	безразмерен енергиен критерий	-	$\Delta T(\text{c})$	характерен температурен интервал	K
K, C	коэффициенти на емпирични модели	според модела	θ	вектор на моделните параметри	-
e, r_i	остатък и стандартизиран остатък	-	RSS/SSE, TSS	остатъчна и обща сума от квадрати	-
AICc	коригиран критерий на Akaike	-	PRESS	сума на квадратите при LOO	-
RMSE_LOO	LOO корен от средната квадратична грешка	log-единици	R ² log	коэффициент на детерминация	-
CV	коэффициент на вариация	%	H ₀	целева прагова дълбочина	μm
μ, σ, Φ	средна, стандартно отклонение, нормална CDF	$\mu\text{m}; \mu\text{m}; -$	r	изисквана вероятност	-
p_{ij}, M	преходна вероятност и матрица	-	U, u(c)	разширена и стандартна неопределеност	според величината

Забележка: знакът „-“ означава безразмерна величина; индексът *i* обозначава ТОЗ или УЗ.

Литература

1. Steen, W. M., & Mazumder, J. (2010). Laser Material Processing (4th ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-84996-062-5>
2. Ion, J. C. (2005). Laser Processing of Engineering Materials. Butterworth-Heinemann. ISBN 978-0-7506-6079-2.
3. Ashby, M. F., & Easterling, K. E. (1984). The transformation hardening of steel surfaces by laser beams - I. Acta Metallurgica, 32(11), 1935-1948. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(84\)90175-5](https://doi.org/10.1016/0001-6160(84)90175-5)
4. Patwa, R., & Shin, Y. C. (2007). Predictive modeling of laser hardening of AISI 5150H steels. International Journal of Machine Tools and Manufacture, 47(2), 307-320. <https://doi.org/10.1016/j.ijmachtools.2006.03.016>
5. Montgomery, D. C. (2017). Design and Analysis of Experiments (9th ed.). Wiley. ISBN 978-1-119-11347-8.
6. Box, G. E. P., & Draper, N. R. (2007). Response Surfaces, Mixtures, and Ridge Analyses (2nd ed.). Wiley. ISBN 978-0-470-05357-7.
7. Hurvich, C. M., & Tsai, C.-L. (1989). Regression and time series model selection in small samples. Biometrika, 76(2), 297-307. <https://doi.org/10.1093/biomet/76.2.297>
8. Burnham, K. P., & Anderson, D. R. (2002). Model Selection and Multimodel Inference (2nd ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/b97636>
9. JCGM 100:2008. Evaluation of measurement data - Guide to the expression of uncertainty in measurement. BIPM.
10. NIST/SEMATECH. e-Handbook of Statistical Methods: Process Modeling and Prediction. <https://www.itl.nist.gov/div898/handbook/> (accessed 10 August 2026).

11. Saltelli, A., et al. (2008). Global Sensitivity Analysis: The Primer. Wiley. ISBN 978-0-470-05997-5.
12. Metropolis, N., & Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method. Journal of the American Statistical Association, 44(247), 335-341. <https://doi.org/10.1080/01621459.1949.10483310>
13. Koistinen, D. P., & Marburger, R. E. (1959). A general equation prescribing the extent of the austenite-martensite transformation. Acta Metallurgica, 7(1), 59-60. [https://doi.org/10.1016/0001-6160\(59\)90170-1](https://doi.org/10.1016/0001-6160(59)90170-1)