

МЕТОДИ ЗА ОЦЕНКА НА УМОРНОТО ПОВРЕЖДАНЕ ПРИ СТОХАСТИЧНИ И ПРОМЕНЛИВОАМПЛИТУДНИ НАТОВАРВАНИЯ – ОБЗОР И СРАВНИТЕЛЕН АНАЛИЗ

Инж. Теодор Минчев

Технически университет - Варна

Резюме: В настоящата статия са представени основните методи, които се използват за оценка на уморното повреждане при циклични натоварвания, използвани в съвременната инженерна практика. Разгледани са класическите подходи, базирани на $S-N$ кривите и правилото на Palmgren–Miner, както и съвременните методи за обработка на натоварвания с променлива амплитуда като алгоритъма Rainflow за преброяване на циклите и спектралните методи. Анализирани са принципите, предимствата и ограниченията на различните методи, както и тяхното приложение при оценката на експлоатационната дълготрайност на инженерни конструкции. Извършеният преглед показва, че изборът на подходящ метод за оценка на уморното повреждане зависи от характера на натоварването, свойствата на материала и условията на експлоатация, като съвременните тенденции са насочени към повишаване на точността на прогнозиране на остатъчния ресурс чрез комбиниране на експериментални, числени и вероятностни модели.

Ключови думи: уморно повреждане, циклични натоварвания, $S-N$ крива, Palmgren–Miner, Rainflow анализ, спектрални методи, натоварване с променлива амплитуда, уморна дълготрайност

METHODS FOR FATIGUE DAMAGE ASSESSMENT UNDER STOCHASTIC AND VARIABLE AMPLITUDE LOADING – A REVIEW AND COMPARATIVE ANALYSIS

Eng. Teodor Minchev

Technical University - Varna

Abstract: This paper presents the fundamental methods employed for fatigue damage assessment under cyclic loading, as utilized in contemporary engineering practice. Classical approaches based on $S-N$ curves and the Palmgren–Miner linear damage rule are reviewed, along with modern techniques for processing variable amplitude loading, such as the Rainflow cycle counting algorithm and spectral methods. The underlying principles, advantages, and limitations of the various approaches are analyzed, as well as their application to the evaluation of the operational durability of engineering structures. The conducted review demonstrates that the selection of an appropriate method for fatigue damage assessment is contingent upon the nature of the loading, material properties, and service conditions. Current

trends are directed toward enhancing the accuracy of residual life predictions through the integration of experimental, numerical, and probabilistic models.

Keywords: *fatigue damage, cyclic loading, S–N curve, Palmgren–Miner rule, Rainflow analysis, spectral methods, variable amplitude loading, fatigue life.*

1. Въведение

Умората на материалите представлява един от основните механизми за разрушаване на металните конструкции, подложени на многократно променящи се натоварвания. За разлика от статичното разрушаване, което настъпва при превишаване на якостта на материала, уморното разрушаване може да възникне при напрежения, значително по-ниски от границата на провлачване, ако натоварването се повтаря достатъчно дълго. Процесът включва зараждане на микропукнатини, тяхното постепенно развитие и последващо разпространение до окончателно разрушаване на конструкцията [1, 14,15,16,18].

В реални експлоатационни условия инженерните конструкции обикновено са подложени на натоварвания с променлива амплитуда, честота и продължителност. За разлика от лабораторните изпитвания при постоянна амплитуда, при които зависимостта между напрежението и броя на циклите до разрушаване се описва чрез S–N криви, експлоатационните натоварвания представляват сложни времеви зависимости с променлив и често случаен характер. Такива натоварвания са характерни за морски офшорни конструкции, мостови съоръжения, железопътни и авиационни конструкции, енергийни съоръжения и машинни елементи, работещи при вибрационни въздействия. Вследствие на тези въздействия в конструкциите възникват сложни променливи напрежения, които не могат да бъдат представени чрез една постоянна амплитуда. Те се характеризират с различни амплитуди, честоти и последователност на натоварващите цикли. Поради това, за надеждна оценка на уморното поведение са необходими специализирани методи за идентифициране на циклите и определяне на натрупаното уморно повреждане [9, 10, 11, 19, 23, 24].

За количествената оценка на това повреждане са развити два основни подхода:

- **методи във времева област (time-domain methods)** – базирани на директен анализ на измерена или симулирана история на натоварването [5, 8, 15,16,17];
- **методи в честотна област (frequency-domain methods)** – използващи статистическо описание на случайното натоварване чрез спектрална плътност на мощността [3,4,7,13].

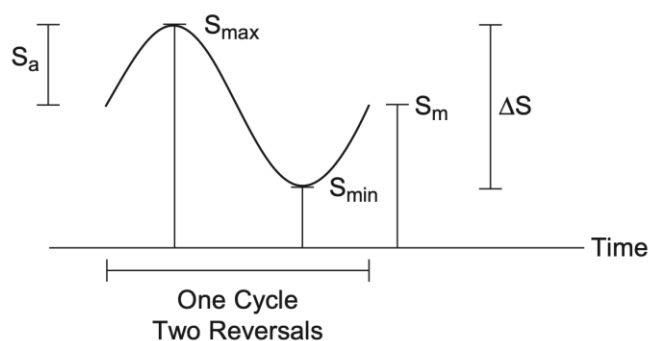
Сред най-разпространените методи във времева област е **Rainflow анализът**, докато спектралните методи се основават на обработката на спектъра на напреженията и изчисляването на спектрални моменти. И двата подхода имат еднаква крайна цел – определяне на разпределението на уморните цикли и оценка на натрупаното повреждане чрез модели като правилото на Минер [9,14].

2. Същност на уморното разрушаване при материалите

Умората на материалите представлява процес на постепенно натрупване на повреди вследствие на многократно променящи се механични натоварвания. За разлика от статичното разрушаване, което настъпва при превишаване на пределната якост на материала, уморното разрушаване може да възникне при напрежения, значително по-ниски от границата на провлачване.

Процесът на уморно разрушаване обикновено протича в три последователни етапа свързани със зараждане на микропукнатини в области с локална концентрация на напрежения, развитие на пукнатината при последователно натоварване и когато остатъчното сечение вече не може да понесе приложеното натоварване, следва разрушаване.

Основният фактор, определящ развитието на умората, е характерът на цикличното натоварване. На фиг. 1 е посочена схема на класическо циклично натоварване [14].



Фиг.1. Параметри на цикличното натоварване [14]

Всеки цикъл може да бъде описан чрез няколко основни параметъра:

– максимално напрежение S_{max} ; минимално напрежение S_{min} ;

– средно напрежение $S_m = \frac{S_{max} + S_{min}}{2}$ (1)

– амплитуда $S_a = \frac{S_{max} - S_{min}}{2}$ (2)

– диапазон на напрежението $\Delta S = S_{max} - S_{min}$ (3)

Тези параметри определят интензивността на цикличното натоварване и се използват при композиране на S–N кривите. Практически всички методи за оценка на умората използват именно амплитудата на напрежението като основен параметър, тъй като тя има най-силно влияние върху броя цикли до разрушаване.

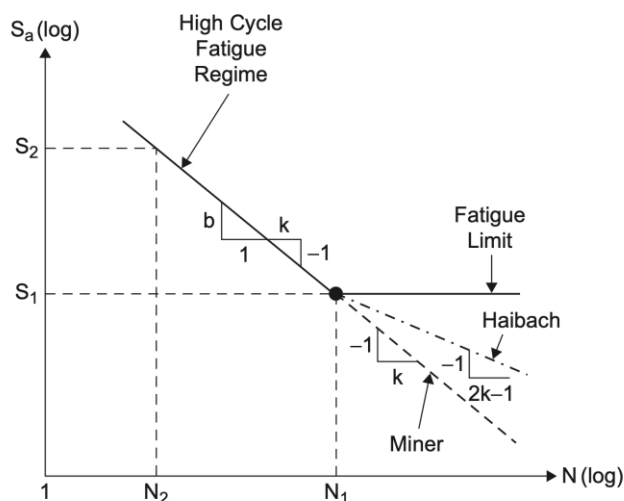
Друг широко използван параметър е коефициентът на асиметрия на цикъла,

$$R = \frac{S_{min}}{S_{max}} \quad (4)$$

който характеризира вида на цикличното натоварване. При напълно обратим цикъл $R = -1$, а средното напрежение е равно на нула. Именно този тип натоварване най-често се използва при експерименталното определяне на S–N кривите.

Основата на инженерния анализ на умората е зависимостта между амплитудата на напрежението и броя цикли до разрушаване, известна като S–N крива или крива на Wöhler. Тази зависимост се определя експериментално чрез изпитване на серия образци при различни нива на циклично натоварване. Получените резултати се представят в логаритмична координатна система, където за високия циклов режим зависимостта може да бъде апроксимирана с права линия.

Наклонът на S–N кривата (фиг.2) оказва съществено влияние върху изчислената уморна дълготрайност. При материали с голям наклон дори малко увеличение на напрежението води до значително намаляване на експлоатационния живот.



Фиг.2. Крива на умора [14]

Коефициентът k (много често се използва и символ “ m ”) представлява наклона на S–N кривата. Той е свързан с експонентата b чрез зависимостта:

$$k = -\frac{1}{b} \quad (5)$$

В областта на умората с голям брой цикли (High-Cycle Fatigue, HCF) всеки две точки от S–N кривата, (S_1, N_1) и (S_2, N_2) , могат да бъдат свързани чрез коефициента b или еквивалентно чрез коефициента на наклона k :

$$\frac{N_2}{N_1} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{-k} = \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^{\frac{1}{b}} \quad (6)$$

От тази зависимост следва, че всяка точка (S_2, N_2) върху S–N кривата може да бъде определена, ако е известна референтна точка (S_1, N_1) и стойността на параметъра b или k .

В инженерната практика S–N кривата най-често се представя чрез степенната зависимост:

$$N S_a^k = A \quad (7)$$

където:

- N – брой цикли до разрушаване;
- S_a – амплитуда на напрежението;
- k – коефициент на наклона на S–N кривата;
- A – константа на материала, определяща положението на кривата.

Еквивалентно, зависимостта може да бъде записана във формата на закона на Basquin:

$$S_a = S'_f (2N)^b \quad (8)$$

където:

- S'_f – коефициент на уморната якост (fatigue strength coefficient), представляващ условната якост на материала при един цикъл (или по-точно при едно обръщане на натоварването);
- b – експонента на уморната якост (fatigue strength exponent), характеризираща наклона на S–N кривата в областта на високия циклов режим.

Уравненията (7) и (8) са сред най-често използваните математически модели за описание на S–N кривите. Те намират широко приложение при оценката на уморната дълготрайност на конструкции, подложени на натоварване с променлива амплитуда, тъй като позволяват директно определяне на допустимия брой цикли до разрушаване за дадено ниво на напрежение. В комбинация с алгоритъма Rainflow и правилото на Palmgren–Miner тези зависимости формират основата на съвременните инженерни методики за анализ на умората [9,14].

При конструкционните стомани S–N кривата притежава хоризонтална асимптота, наречена граница на умората (фиг.2). Под тази стойност се приема, че материалът може да издържи практически неограничен брой цикли без разрушаване. При алуминиевите сплави такава граница не съществува. При тях S–N кривата продължава да намалява и при много голям брой цикли, поради което вместо граница на умората се използва понятието граница на издръжливост, определена за предварително зададен брой цикли. Тази особеност е особено важна например за офшорните конструкции, тъй като много съвременни плаващи системи и морски съоръжения използват алуминиеви сплави с цел намаляване на собственото тегло.

Реалните конструкции практически никога не работят при постоянно натоварване. Вместо това те са подложени на натоварвания с непрекъснато изменяща се амплитуда.

Най-разпространеният и класически инженерен модел за оценка на натрупаната повреда е правилото на Palmgren–Miner. Според него относителната повреда, причинена от всеки клас натоварване, е:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (9)$$

където:

- n_i е реалният брой цикли;
- N_i е броят цикли до разрушаване при същото напрежение.

Общата повреда се определя като:

$$D = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{N_i} \quad (10)$$

Разрушаването настъпва при $D \geq 1$.

За да се приложи правилото на Palmgren–Miner е необходимо да бъде известен броят цикли за всяко ниво на напрежение. В реалните условия обаче натоварването представлява сложна времева зависимост, съдържаща хиляди локални максимуми и минимуми.

Следователно първата задача при анализа на умората е преобразуването на времевата история на напрежението в дискретни цикли с определени амплитуди и средни напрежения.

3. Методи във времева област (time-domain methods). Rainflow анализ (RF)

Оценката на уморната дълготрайност при променливи натоварвания дълго време представлява сериозен проблем в инженерната практика. При постоянна амплитуда броят на циклите до разрушаване може да бъде определен директно чрез S–N кривите.

Реалните експлоатационни натоварвания обаче се характеризират със случайно изменящи се амплитуди, различни честоти и сложна последователност на циклите. Това налага разработването на методи, които преобразуват сложната времева история на напрежението в еквивалентен набор от цикли, подходящ за уморен анализ.

През 1968 г. японските учени Matsuishi и Endo предлагат нов подход, известен като Rainflow Cycle Counting Method [15, 16, 22]. Името произлиза от аналогията с движението на дъждовните капки по наклонен покрив. Когато капките достигнат по-ниска точка или срещнат по-голяма капка, те се сливат и продължават движението си. При натоварване с променлива амплитуда напрежението може да бъде представено като времева функция:

$$\sigma = \sigma(t) \quad (11)$$

Rainflow методът, представлява алгоритъм за идентифициране и класификация на затворени хистерезисни цикли в произволна времева история. Методът преобразува сложния сигнал в набор от цикли с определени:

- амплитуда на напрежението;
- средно напрежение;
- брой повторения.

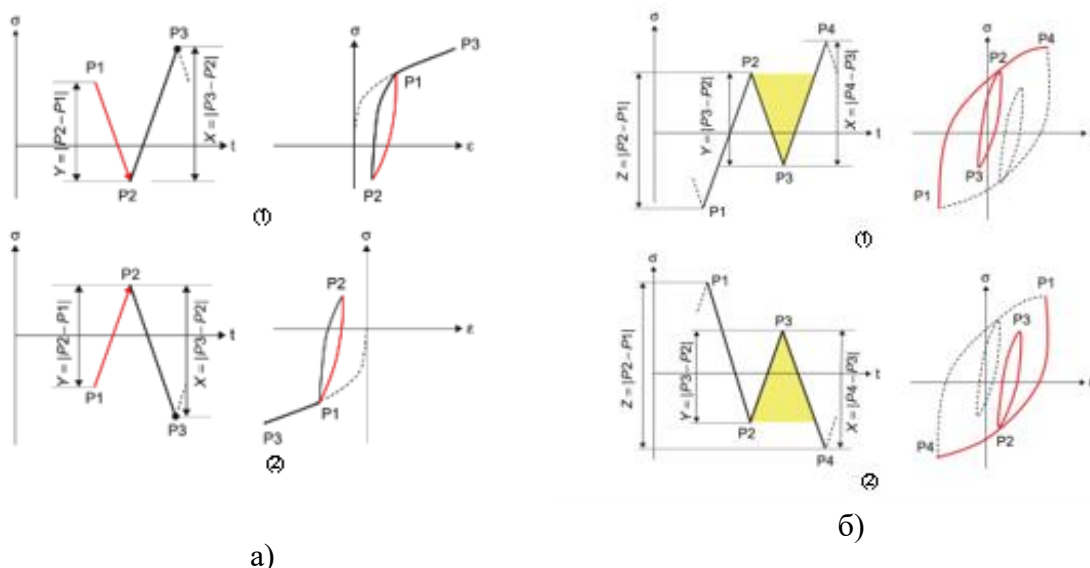
Полученото разпределение може да бъде представено като:

$$n_i = f(\sigma_{a,i}) \quad (12)$$

където:

- n_i е броят цикли с амплитуда $\sigma_{a,i}$;
- $\sigma_{a,i}$ е амплитудата на съответния цикъл.

На фиг. 3а и 3б са посочени по два възможни случая на идентифициране на реверсия (обръщане на посоката на натоварване) в началото на времевата история на напрежението, използвайки три- и четириточковия метод на алгоритъма Reinfo.



Фиг.3. Илюстрации на три- и четириточковия метод за преброяване на реверсиите [15]: а) триточков метод; б) четириточков метод

3.1. Случай (1) – реверсия от P_1 до P_2 - фиг.3а (1).

Трите точки P_0 , P_1 и P_2 образуват последователност, при която се наблюдава промяна в посоката на натоварване.

Точката P_1 се идентифицира като локален максимум или минимум (пик или долина), тъй като стойността ѝ е по-висока (или по-ниска) от съседните точки P_0 и P_2 . Тази реверсия се записва като начало на потенциален цикъл.

3.2. Случай (2) – реверсия от P_1 до P_2 при различно начало - фиг.3а (2).

Тук началото на времевата история е различно, но триточковият критерий отново идентифицира P_1 като реверсия.

В зависимост от относителните стойности на диапазоните между точките, тази реверсия може да доведе до затворен хистерезисен контур (пълен цикъл) или да остане като полуцикъл за последваща обработка.

Триточковият критерий се основава на следното условие:

Ако за три последователни точки x_{i-1}, x_i, x_{i+1} е изпълнено:

$$x_{i-1} < x_i > x_{i+1} \text{ или } x_{i-1} > x_i < x_{i+1} \quad (13)$$

тогава точката x_i се определя като локален екстремум (реверсия). След това, за да се определи дали диапазонът между две реверсии представлява пълен цикъл или полуцикъл, се прилага четириточковият критерий на ASTM E1049.

На фиг. 3б са графически изобразени двата основни случая, при които четириточковият критерий идентифицира пълен цикъл в зависимост от взаимното разположение на точките P_1, P_2, P_3, P_4 .

3.3. Случай (1) – Висящ цикъл (Hanging Cycle) - фиг.3б (1)

Точките P_1, P_2, P_3, P_4 образуват последователност, при която диапазонът между P_2 и P_3 е по-малък или равен на съседните диапазони P_1P_2 и P_3P_4 . Това означава, че цикълът $P_2 \rightarrow P_3$ е "вложен" в по-голям цикъл и не достига до началната точка P_1 .

Такъв цикъл се отчита като пълен цикъл и точките P_2 и P_3 се изтриват от серията, след което P_1 се свързва с P_4 . Нарича се "висящ", защото цикълът е като "окачен" между две по-високи/по-ниски точки.

3.4. Случай (2) – Стоящ цикъл (Standing Cycle) - фиг.3б (2)

Тук диапазонът P_2P_3 също е по-малък от съседните, но този път цикълът достига до началната точка P_1 или я "опира". В този случай диапазонът P_2P_3 се отчита като пълен цикъл, но точката P_2 се изтрива, а P_3 остава, за да бъде свързана с P_1 и P_4 при следващите стъпки. Нарича се "стоящ", защото цикълът "стъпва" върху началната реверсия.

Математически, четириточковият критерий се изразява като:

$$|P_1 - P_2| \geq |P_2 - P_3| \leq |P_3 - P_4| \quad (14)$$

Когато това условие е изпълнено, диапазонът $|P_2 - P_3|$ се записва като пълен цикъл. Ако диапазонът P_2P_3 не съдържа началната точка, се прилага случай (а) – висящ цикъл. Ако съдържа началната точка, се прилага случай (б) – стоящ цикъл.

Висящите цикли (а) представляват малките цикли, вложени в по-големи, които допринасят за натрупването на повреда, но не променят основната посока на натоварване.

Стоящите цикли (б) са свързани с началото на времевата история и се отчитат като полуцикли, за да се гарантира, че всички големи диапазони на напрежение са взети предвид, дори когато не образуват затворен контур

След като всички цикли, отговарящи на четириточковия критерий, бъдат идентифицирани и изтрети, остава остатък (residue) от данни, който се обработва по един от трите метода – полуциклово отчитане, повторно Rainflow отчитане или конкатениране (съединяване) на остатъците [15].

През следващите десетилетия Rainflow постепенно се утвърждава като най-надеждния метод за преброяване на циклите. Днес алгоритъмът е включен в стандарта ASTM E1049, както и в повечето нормативни документи за оценка на умората, използвани в корабостроенето, авиацията, автомобилната индустрия и офшорното инженерство.

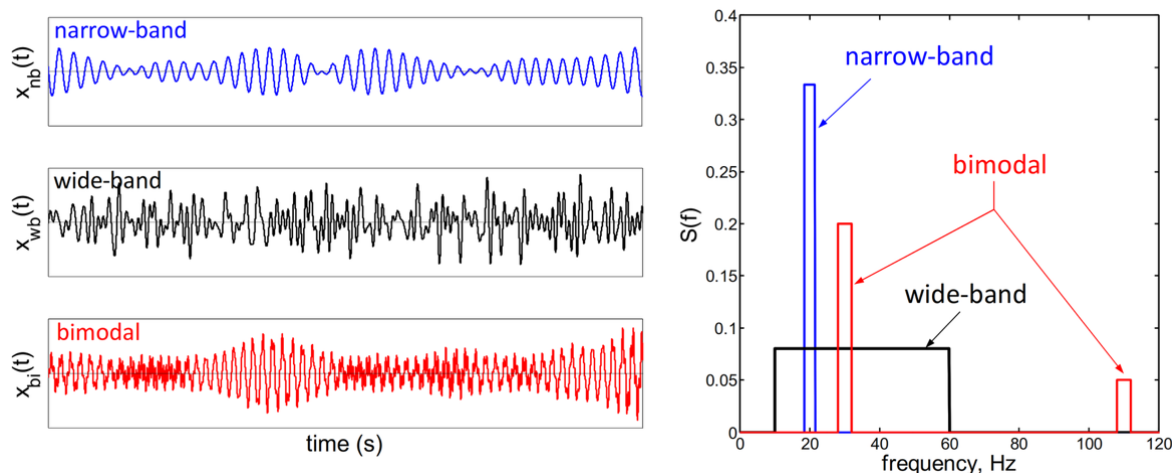
След публикуването на оригиналната идея алгоритъмът претърпява значително развитие. Първоначалната графична процедура постепенно е заменена от числени алгоритми, подходящи за компютърна обработка на големи масиви от данни. Това развитие е обусловено от навлизането на цифровите измервателни системи и необходимостта от автоматизиран анализ на продължителни записи на натоварването.

Наред с класическия едноосен Rainflow, през последните години значително внимание се отделя на обработката на остатъчните полуцикли, разработването на алгоритми за многоосно натоварване и интегрирането на метода в съвременните програмни продукти за анализ на умората.

Прегледът на научните публикации показва, че независимо от широкото си приложение, класическият Rainflow алгоритъм притежава определени ограничения. Най-същественото от тях е липсата на информация за последователността на натоварванията, което може да доведе до неточности при анализ на нестационарни процеси и редки екстремни натоварвания. Освен това класическият алгоритъм е разработен основно за едноосни напрегнати състояния, поради което при сложни пространствени натоварвания е необходимо използването на разширени многоосни подходи.

4. Спектралните методи за оценка на умората

Спектралните методи за оценка на умората представляват едни от най-широко използваните направления при анализа на конструкции, подложени на случайни динамични натоварвания. [3,4]. Те намират особено широко приложение при офшорните конструкции, морските платформи, корабните корпуси, мостовете, вятърните турбини и авиационните конструкции, където натоварванията могат да бъдат разглеждани като стационарни случайни процеси. За разлика от методите във времева област, при които се анализира действителната времева история на напреженията, спектралните методи използват статистическите характеристики на сигнала, представени чрез спектралната плътност на мощността (Power Spectral Density, PSD). По този начин се избягва необходимостта от генериране и обработка на продължителни времеви реализации, което значително намалява изчислителните разходи [7, 22].



Фиг. 4. Времеви реализации на случайни процеси с различни спектрални характеристики [7]

На фиг. 4 са посочени три времеви реализации на случайни процеси с различни спектрални характеристики. Разликите между тях се определят от съответните спектрални плътности на мощността (PSD), които описват разпределението на енергията по честоти. Представените спектри са идеализирани чрез правоъгълни блокове (представени схематично в дясно), докато в реалните инженерни приложения PSD обикновено има непрекъснат и по-гладък характер [7].

Основната идея на спектралния анализ е, че ако процесът на натоварване е стационарен и може да бъде описан като гаусов случаен процес, вероятностното разпределение на амплитудите на напрежението може да бъде определено директно от спектралните характеристики. Това позволява оценяване на уморната повреда без предварително преброяване на циклите чрез Rainflow алгоритъма.

При стационарен гаусов случаен процес $X(t)$ със средна стойност, равна на нула, основните статистически характеристики в честотната област се определят чрез едностранната спектрална плътност на мощността (Power Spectral Density, PSD), означавана като $G(\omega)$ или $G(f)$. Спектралната плътност описва разпределението на енергията на случайния процес по честоти и представлява основен входен параметър при спектралните методи за оценка на уморното повреждане. Количественото описание на PSD се извършва чрез спектралните моменти, които се определят по зависимостта:

$$m_i = \int_0^\infty \omega^i G(\omega) d\omega = \int_0^\infty (2\pi f)^i G(f) df, \quad (15)$$

където:

- m_i – спектрален момент от i -ти ред;
- ω – кръгова честота [rad/s];
- f – честота [Hz];
- $G(\omega)$ и $G(f)$ – едностранна спектрална плътност на мощността.

Редът i може да приема всяка неотрицателна реална стойност, но в инженерната практика най-често се използват моментите от нулев, втори и четвърти ред.

Използването на спектралните моменти позволява определяне на статистическите характеристики на цикличното натоварване без директно извличане на отделните цикли.

4.1. Основни спектрални методи

Развитието на спектралните методи започва с предположението, че напреженията следват теснолентов (narrow-band) гаусов процес. При това условие амплитудите на напрежението се подчиняват на разпределението на Rayleigh, което позволява директно определяне на честотата на циклите и натрупаната уморна повреда. Практическите експлоатационни натоварвания обаче рядко са теснолентови. Вълновите натоварвания върху офшорни конструкции, например, обикновено са широколентови (wide-band), което води до значителни отклонения при използването на класическия теснолентов модел. Това налага разработването на по-усъвършенствани модели. Сред най-широко използваните спектрални методи са [7,13,25]:

- Теснолентовите методи (Narrow-Band Method);
- Широколентовите методи (Wide-Band Methods)
 - Wirsching–Light метод;
 - Dirlik метод;
 - Tovo–Benasciutti метод;
 - Zhao–Baker метод
 - Lalanne метод;
 - $\alpha 0.75$ метод

В контекста на оценката на експлоатационния живот на конструкции, подложени на широколентови случайни натоварвания, спектралните методи предоставят значително по-висока изчислителна ефективност в сравнение с директния анализ във времевата област.

По-долу са разгледани шест основни метода, класифицирани според подхода им – апроксимация на функцията на плътността на вероятността (PDF) или корекция на теснолентовото решение [3,7]. Означенията са съгласно стандартната теория на случайните процеси: m_0, m_2, m_4 представляват спектрални моменти, $\alpha_2 = m_2 / \sqrt{m_0 m_4}$ е параметър на широчината на спектъра, f_0 е очакваната честота на нулевите пресичания, а m и C са параметрите на кривата на умора ($N = C \cdot S^{-m}$).

4.1.1. Метод на Wirsching–Light

Методът предлага полуемпиричен корекционен фактор, приложен към базовото теснолентово приближение на Rayleigh. Неговата формулировка се основава на регресионен анализ за отчитане на широколентовия характер. Повредата се изразява като:

$$E[D_{WL}] = \lambda(m, \alpha_2) \cdot E[D_{NB}] \quad (16)$$

където:

$$E[D_{NB}] = \frac{1}{C} (\sqrt{2m_0})^m \cdot \Gamma\left(1 + \frac{m}{2}\right) \cdot f_0, \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_2}{m_0}} \quad (17)$$

$$\lambda(m, \alpha_2) = a(m) + [1 - a(m)](1 - \alpha_2)^{b(m)}, \quad (18)$$

с емпирични коефициенти $a(m) = 0.926 - 0.033m$ и $b(m) = 1.587m - 2.323$.

4.1.2. Метод на Dirlik

Методът на Dirlik се основава на числени симулации и апроксимира разпределението на амплитудите на Rainflow-циклите чрез линейна суперпозиция на експоненциално и две разпределения на Rayleigh. Той се счита за един от най-точните и широко прилагани модели в практиката:

$$p(S) = \frac{D_1}{Q} e^{-\frac{Z}{Q}} + \frac{D_2 Z}{R^2} e^{-\frac{Z^2}{2R^2}} + D_3 Z e^{-\frac{Z^2}{2}}, \quad (19)$$

където $Z = S/\sqrt{m_0}$, а параметрите D_1, D_2, D_3, Q, R са функции на спектралните моменти и коефициентите $\gamma_1 = m_1/\sqrt{m_0 m_2}$ и $\gamma_2 = \alpha_2$. Очакваната повреда се изчислява чрез интегриране по амплитудите:

$$E[D_{Dirlik}] = \frac{f_p}{c} \int_0^\infty S^m \cdot p(S) dS, \quad f_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{m_4}{m_2}}. \quad (20)$$

4.1.3. Метод на Tovo–Benasciutti

Демонстрирайки висока точност при широколентови процеси, този метод прилага тегловна комбинация от теснолентовата повреда ($E[D_{NB}]$) и повредата, съответстваща на "метода на двата върха" ($E[D_{RC}]$). Крайният израз се дава като:

$$E[D_{TB}] = b \cdot E[D_{RC}] + (1 - b) \cdot E[D_{NB}], \quad (21)$$

където тегловният коефициент $b = \alpha_2$ в своята класическа форма.

4.1.4. Метод на Zhao–Baker

Подобно на Dirlik, този метод предлага апроксимация на PDF на амплитудите, но представлява линейна комбинация от разпределение на Rayleigh и разпределение на Weibull. Моделът се описва чрез:

$$p(S) = w \cdot \frac{S}{\beta^2} e^{-\frac{S^2}{2\beta^2}} + (1 - w) \cdot \frac{\alpha S^{\alpha-1}}{\delta^\alpha} e^{-\left(\frac{S}{\delta}\right)^\alpha}, \quad (22)$$

където: теглото w и параметрите β, δ, α са емпирични функции на α_2 и спектралната асиметрия γ_1 .

4.1.5. Метод на Lalanne

Методът на Lalanne въвежда корекция на теснолентовия модел, отчитаща групирането на цикличните натоварвания. Приема се следната проста форма:

$$E[D_{Lalanne}] = \rho_L \cdot E[D_{NB}], \quad \rho_L = \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}}. \quad (23)$$

4.1.6. Метод на $\alpha_{0.75}$

Този модел предлага много опростена емпирична корекция чрез използването на дробния спектрален момент $m_{0.75}$. Повредата се оценява като:

$$E[D_{\alpha_{0.75}}] = \alpha_{0.75}^m \cdot E[D_{NB}], \quad (24)$$

където $\alpha_{0.75} = m_{0.75} / \sqrt{m_0 m_{1.5}}$.

5. Анализ на представените методи

По отношение на методологични и изчислителни критерии съпоставката между времевия Rainflow алгоритъм и спектралните методи разкрива фундаментален компромис между физическа достоверност и изчислителна ефективност. Rainflow анализът се утвърждава като еталонен (reference) метод за преброяване на циклите, тъй като възпроизвежда реалната последователност на хистерезисните цикли, което му позволява да отчита нелинейни ефекти и преходни режими на натоварване. Тази физическа адекватност, съчетана със стандартизацията му в редица международни норми (напр. ASTM E1049), го прави незаменим за финални сертификационни изчисления в авиацията, автомобилостроенето и енергетиката. От друга страна, спектралните методи работят единствено със статистическите параметри на честотния спектър (спектрални моменти), което елиминира нуждата от генериране и обработка на дълги времеви реализации. Това им осигурява значително предимство в изчислително отношение, особено при мащабни параметрични изследвания и ранни етапи на проектиране, при които се разглеждат стотици натоварващи състояния.

По отношение на точност, ограничения и инженерен избор, Макар спектралните методи да се отличават с висока изчислителна ефективност, тяхната приложимост е обвързана с критични предположения за линейност, стационарност и Гаусово разпределение на случайните процеси. При силно нестационарни или нелинейни натоварвания тези допускания се нарушават, което може да доведе до значителни грешки в прогнозата за експлоатационния ресурс. Сред съществуващите спектрални подходи, методите на Dirlik и Tovo–Benasciutti демонстрират най-висока точност при широколентови сигнали, като резултатите им се доближават до тези от класическия Rainflow анализ, докато методите на Wirsching–Light и $\alpha_{0.75}$ предлагат добра алтернатива за бързи инженерни преценки с приемлива точност. Следователно, изборът между двата подхода не може да бъде еднозначен, а следва да се базира на комплексна оценка на конкретните характеристики на натоварването, изискванията за точност, наличните изчислителни ресурси и фазата от жизнения цикъл на конструкцията. Съвременната тенденция се насочва към хибридни стратегии, при които спектралните методи служат за бърза предварителна оценка, а Rainflow се прилага за финална верификация на критични зони.

Таблица 1.

Сравнителна таблица между спектралните методи (в частност Dirlik, Tovo-Benasciutti, Wirsching-Light и др.) и метода Rainflow

<i>Критерий за сравнение</i>	<i>Метод Rainflow (Времеви анализ)</i>	<i>Спектрални методи (Честотен анализ)</i>
1. Област на анализ	Времева област (Time-domain).	Честотна област (Frequency-domain) – чрез спектрална плътност на мощността (PSD).
2. Изисквани входни данни	Пълна времева история (Time history) на натоварването.	Статистически характеристики на сигнала – спектрални моменти (m_0, m_2, m_4 и др.).
3. Изчислителна ефективност	Ниска/Умерена. Изисква скъпоструващо преброяване на циклите за дълги записи.	Много висока. Изчисленията са бързи, тъй като работят с интегрални параметри, без да обработват всяка точка от сигнала.
4. Точност при широколентови процеси	Еталон (Reference). Приема се за "златен стандарт", защото физически проследява всеки цикъл и хистерезис.	По-ниска. Методите са приближения. Най-добрите (Dirlik, Tovo-Benasciutti) дават грешка от порядъка на 5–15% спрямо Rainflow.
5. Точност при теснолентови процеси	Много висока.	Много висока. При $\alpha_2 \rightarrow 1$ (теснолентов), спектралните методи се свеждат до точното Rayleigh разпределение.
6. Възможност за анализ в реално време (онлайн)	Трудно приложим за непрекъснат мониторинг (висока изчислителна цена).	Отличен. Подходящ за вграждане в системи за структурен мониторинг (SHM) и цифрови двойници.
7. Отчитане на последователността на натоварването	Да. Отчита ефекта на последователността (напр. големи цикли след малки), което е физически важно.	Не. Стационарните спектрални методи не отчитат времевата последователност (допускат случайно разпределение).
8. Отчитане на нелинейност и пластичност	Може да се комбинира с нелинейни пластични модели (напр. модел на Ramberg-Osgood).	Силно ограничени. Базират се на линейна еластична теория и стационарни случайни процеси.
9. Зависимост от дължината на записа	Резултатът е чувствителен към дължината – трябва да обхваща всички редки събития.	Независим. Ако PSD спектърът е представителен, методът работи независимо от времевата дължина.
10. Приложимост при нестационарни процеси	Да. Ако времевият запис обхваща преходни режими (transients), Rainflow ги отчита.	Не. Класическите спектрални методи са валидни само за стационарни и ергодични процеси.
11. Основни ограничения	Изисква огромни масиви от данни; бавна обработка; не е подходящ за начални проектни етапи.	Предполага линейност, стационарност и Гаусово разпределение на натоварването.
12. Типично приложение в индустрията	Финализиращи проверки, сертификация, анализ на аварийни ситуации (напр. авиация, автомобилостроене).	Начално проектиране, офшорни конструкции, вятърни турбини, бърза оценка на ресурса.

Заклучение

Въпреки адекватността на класическите методи, непрекъснатото развитие на материалите, конструктивните решения и цифровите технологии поставя нови предизвикателства. Бъдещите изследвания се насочват към разработването на алгоритми, които съчетават висока изчислителна ефективност с по-пълно и реалистично описание на физическите процеси на уморно повреждане.

Особен научен и практически интерес представляват следните направления:

- Вероятностни модели и анализ в реално време: Разработване на разширени вероятностни подходи, които да отчитат нелинейните механизми на натрупване на повреда в реално време.

- Интеграция с цифрови технологии: Прилагане на съвременните методи за структурен мониторинг (Structural Health Monitoring, SHM) и създаването на цифрови двойници (Digital Twins), които да актуализират остатъчния ресурс на базата на актуални сензорни данни.
- Машинно обучение и изкуствен интелект: Използване на методи от областта на машинното обучение за автоматизирана оценка на експлоатационния ресурс, което би позволило разпознаване на сложни модели на натоварване без необходимост от класически цикличен анализ.
- В заключение, макар че класическите методи като Rainflow и спектралния анализ остават златният стандарт в инженерната практика, тяхното усъвършенстване и интегриране със съвременните цифрови технологии е ключова стъпка към по-надеждно и ефективно управление на живота на сложните инженерни конструкции в бъдеще.

Литература

1. ASTM International. (2017). *ASTM E1049–17: Standard Practices for Cycle Counting in Fatigue Analysis*. West Conshohocken, PA, USA: ASTM International.
2. Bannantine, J. A., Comer, J. J., & Handrock, J. L. (1990). *Fundamentals of Metal Fatigue Analysis*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
3. Benasciutti, D., & Tovo, R. (2005). Spectral methods for lifetime prediction under wide-band stationary random processes. *International Journal of Fatigue*, **27**(8), 867–877. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2004.10.007>
4. Benasciutti, D., & Tovo, R. (2006). Comparison of spectral methods for fatigue analysis of broad-band Gaussian random processes. *Probabilistic Engineering Mechanics*, **21**(4), 287–299. <https://doi.org/10.1016/j.probengmech.2005.10.003>
5. Bibbo, D., Concli, F., & Maccioni, L. (2022). A multiaxial rainflow counting method for fatigue damage evaluation under complex loading conditions. *International Journal of Fatigue*, **161**, 106921.
6. Cheng, T., Lu, D. D.-C., & Siwakoti, Y. P. (2022). Circuit-based rainflow counting algorithm in application of power device lifetime estimation. *Energies*, **15**(14), Article 5159. <https://doi.org/10.3390/en15145159>
7. Dirlik, T., & Benasciutti, D. (2021). Dirlik and Tovo–Benasciutti Spectral Methods in Vibration Fatigue: A Review with a Historical Perspective. *Metals*, **11**(9), 1333. <https://doi.org/10.3390/met11091333>
8. Downing, S. D., & Socie, D. F. (1982). Simple rainflow counting algorithms. *International Journal of Fatigue*, **4**(1), 31–40.
9. Fatemi, A., & Yang, L. (1998). Cumulative fatigue damage and life prediction theories: A survey of the state of the art for homogeneous materials. *International Journal of Fatigue*, **20**(1), 9–34.
10. Guth, S., & Sapsis, T. P. (2021). Probabilistic characterization of the effect of transient stochastic loads on the fatigue-crack nucleation time. *Probabilistic Engineering*

- Mechanics, 66, Article 103162. <https://doi.org/10.1016/j.pro bengmech.2021.103162>
11. Guth, S., & Sapsis, T. P. (2022). Limitations of rainflow cycle counting for stochastic fatigue analysis and a probabilistic alternative. *Proceedings of the Royal Society A*, **478**.
 12. International Organization for Standardization. (2017). *ISO 12110-2: Metallic Materials—Fatigue Testing—Variable Amplitude Fatigue Testing*.
 13. Larsen, C. E., & Irvine, T. (2015). A Review of Spectral Methods for Variable Amplitude Fatigue Prediction and New Results. *Procedia Engineering*, **101**, 243–250.
 14. Lee, Y.-L., & Barkey, M. E. (2012). *Metal Fatigue Analysis Handbook: Practical Problem-Solving Techniques for Computer-Aided Engineering* (2nd ed.). Butterworth-Heinemann.
 15. Lee, Y.-L., & Tjhung, T. (2012). Rainflow cycle counting techniques. In Y.-L. Lee & M. E. Barkey (Eds.), *Metal Fatigue Analysis Handbook: Practical Problem-Solving Techniques for Computer-Aided Engineering* (2nd ed., Chapter 3). Butterworth-Heinemann. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-385204-5.00003-3>
 16. Marsh, G. (2016). Review and application of Rainflow residue processing techniques for accurate fatigue damage estimation. *International Journal of Fatigue*. <https://doi.org/10.1016/j.ijfatigue.2015.10.007>
 17. Niesłony, A. (2009). Determination of fragments of multiaxial service loading strongly influencing the fatigue of machine components. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **23**(8), 2712–2721.
 18. Okamura, H., Sakai, S., & Susuki, I. (1979). Cumulative fatigue damage under random loads. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, **1**, 409–419.
 19. Partovi-Mehr, N.; DeFrancisci, J.; Minaeijavid, M.; Moaveni, B.; Kuchma, D.; Baxter, C.D.P.; Hines, E.M.; Bradshaw, A.S. Fatigue Analysis of a Jacket-Supported Offshore Wind Turbine at Block Island Wind Farm. *Sensors* 2024, **24**, 3009, <https://doi.org/10.3390/s24103009>
 20. Rice, S. O. (1944). Mathematical analysis of random noise. *Bell System Technical Journal*, **23**, 282–332.
 21. Tien, S.-C., Wei, H., Chen, J., & Liu, Y. (2022). Energy-based time derivative damage accumulation model under uniaxial and multiaxial random loadings. *Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures*, **45**(1), 159–173. <https://doi.org/10.1111/ffe.13591>
 22. Tovo, R. (2002). Cycle distribution and fatigue damage under broad-band random loading. *International Journal of Fatigue*, **24**, 1137–1147.
 23. Wirsching, P. H., & Light, M. C. (1980). Fatigue under wide-band random stresses. *Journal of the Structural Division, ASCE*, **106**(ST7), 1593–1607.
 24. Zhao, W., & Baker, M. J. (1992). On the probability density function of rainflow stress range for stationary Gaussian processes. *International Journal of Fatigue*, **14**(2), 121–135.
 25. Zorman, A., Slavič, J., & Boltežar, M. (2023). Vibration Fatigue by Spectral Methods—A Review with Open-Source Support. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **190**, 110108.